Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Е. И. Блинова, В. М. Марченко, Н. П. Можей

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Учебное пособие для студентов всех
специальностей**

Минск 2005

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
Б 69

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:
заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных БГУ, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор *Ю. С. Харин*;
заведующий кафедрой методов оптимального управления БГУ, доктор физико-математических наук, профессор *А. И. Калинин*

Блинова, Е. И.
Б 69 Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов всех специальностей / Е. И. Блинова, В. М. Марченко, Н. П. Можей. — Мн. : БГТУ, 2005. — 120 с.

ISBN 985-434-535-1

Учебное пособие предназначается студентам всех специальностей и может быть полезно практическим работникам, применяющим методы и приемы теории вероятностей. Содержится свыше 100 задач. Приводятся краткие теоретические сведения и формулы, даны подробные решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения с ответами и с указаниями.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171

ISBN 985-434-535-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении темы «Теория вероятностей» в курсе высшей математики наибольшую трудность вызывает применение теории при решении практических задач. В имеющейся математической литературе мало руководств по теории вероятностей (ТВ), которые систематически излагали бы методы решения задач и тем самым помогали студентам приобрести необходимые навыки. Настоящее учебное пособие должно оказать помощь в овладении методикой решения задач по теории вероятностей и в применении методов теории вероятностей к решению практических задач.

Пособие содержит свыше ста задач по основным разделам теории вероятностей. В начале каждого раздела приведен краткий перечень необходимых теоретических сведений и формул. Основы практических навыков владения материалом по ТВ закладываются путем подробного анализа решений типовых задач. Для закрепления этих навыков приводятся задачи для самостоятельного решения. К этим задачам даны методические указания и вопросы, ответы на которые должны способствовать решению основной задачи. В конце пособия приведены ответы к задачам для самостоятельного решения, снабженные подробными пояснениями.

В конце глав приведены контрольные задания, позволяющие студенту самостоятельно оценить свои знания. Предлагается 6 вариантов контрольных заданий, из которых первые два — наиболее простые. Контрольные задания снабжены ответами, а также консультациями двух уровней. В консультациях 1-го уровня предлагается подсказка (идея, наводящий вопрос, метод решения и т. п.), а консультации 2-го уровня содержат подробно разобранные решения.

В конце пособия приведены необходимые таблицы.

Пособие можно использовать как для самостоятельной, так и для аудиторной работы при изучении ТВ студентами всех специальностей, в том числе и студентами заочной формы обучения.

ГЛАВА 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает, сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества.

Наиболее важные правила и формулы комбинаторики рассмотрим на примерах.

Пример 1. Из Минска в Гомель можно добраться тремя способами: поездом, автобусом или самолетом; из Гомеля в местечко N можно доехать автобусом или дойти пешком. а) Сколько различных по способу передвижения туристических маршрутов можно организовать из Минска в N через Гомель? б) Сколько различных по способу передвижения туристических маршрутов можно организовать из Гомеля в Минск или из Гомеля в N?

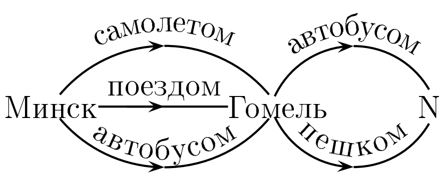


Рис. 1

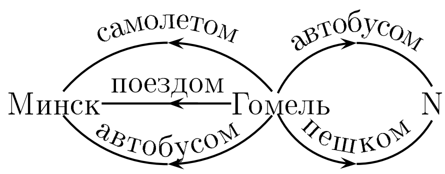


Рис. 2

Решение. а) Нужные маршруты легко перечислить (рис. 1): 1) из Минска в Гомель самолетом, далее автобусом; 2) из Минска в Гомель самолетом, далее пешком; 3) поездом – автобусом; 4) поездом – пешком; 5) автобусом – автобусом; 6) автобусом – пешком.

Как подсчитать количество маршрутов, не перечисляя их? Имеется 3 способа добраться из Минска в Гомель и 2 способа — из Гомеля в N. На каждый способ добраться из Минска в Гомель приходится два способа добраться в N; всего — $3 \cdot 2 = 6$ способов.

б) Нужно выбрать либо один из 3 вариантов добраться из Гомеля в Минск, либо один из 2 вариантов путешествия из Гомеля в N (рис. 2). Всего получается $3 + 2 = 5$ вариантов.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами, то выбор пары «A **и** B» в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Правило суммы. Если объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор «A **или** B» можно осуществить $m + n$ способами.

Применим правило произведения в следующем примере.

Пример 2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове: а) МАЙ; б) ИЮНЬ; в) ОСЕНЬ?

Решение. а) Легко выписать все перестановки букв М, А, Й:

МАЙ; АМЙ; ЙМА;
МЙА; АЙМ; ЙАМ.

На первое место можно поставить любую из 3 букв; на второе — любую из оставшихся 2 букв; на третье место остается 1 буква. По правилу произведения получаем: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов.

б) Аналогично пункту а) первую букву можно выбрать 4 способами; на каждый способ выбора первой буквы приходится 3 способа выбора второй буквы; на каждый способ выбора первых двух букв приходится 2 способа выбора третьей буквы; четвертая буква определяется однозначно. Всего получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.

в) Рассуждая так же, как в случае б), получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов.

Замечание. В рассмотренном примере существенным было то, что слова состоят из различных букв.

Пример 3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове МАМА?

Решение. Всего имеется 6 различных вариантов перестановки этих букв:

МАМА; МААМ; ММАА;
АМАМ; АММА; ААММ.

Для того чтобы найти общее число способов N без перечисления вариантов, будем считать все буквы различными: $М_1$, $А_1$, $М_2$, $А_2$ и подсчитаем двумя способами количество различных перестановок этих четырех букв. Первый способ — аналогично примеру 2. На первое место можно поставить любую из 4 букв; на второе — любую из оставшихся 3 букв и т. д. По правилу произведения получаем: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.

Второй способ: сперва выбрать места для букв М и А (N способов), а затем переставить на своих местах буквы М ($2 \cdot 1 = 2$ способа) и буквы А (2 способа). По правилу произведения, всего $N \cdot 2 \cdot 2 = 4N$ способов.

Из равенства $4N = 24$ находим $N = 6$ способов.

Пример 4. а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? б) Сколько трехзначных чисел, состоящих из различных цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. а) Каждую цифру можно выбрать 5 способами, следовательно, всего таких чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

б) Первую цифру можно выбрать 5 способами; на каждый способ выбора первой цифры приходится 4 способа выбора второй цифры (можно взять любую цифру, кроме той которую выбрали первый раз); на каждый способ выбора первых двух цифр приходится 3 способа выбора третьей цифры. Всего получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждая упорядоченная комбинация, содержащая m элементов из этих n, называется ***размещением*** из n элементов по m. ***Число размещений из n по m*** обозначается A_n^m, его легко вычислить аналогично примерам 2 и 4:

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{m \text{ множителей}}.$$

В примере 4б) нужно выбрать 3 цифры из 5 с учетом их порядка. Поэтому количество возможных вариантов выбора равно $A_5^3 = 60$.

Размещения из n элементов по n называются ***перестановками*** (из n элементов). ***Число P_n перестановок*** из n элементов выражается формулой $P_n = A_n^n = n!$. Заметим, что число перестановок для $n = 2$, 3, 4 вычислено в примере 2.

Замечание. По определению $\boxed{0! = 1}$

Неупорядоченные комбинации (порядок не имеет значения), содержащие m элементов из данных n, называются ***сочетаниями*** из n элементов по m. ***Число сочетаний из n по m*** обозначается C_n^m.

Пример 5. Записать все возможные сочетания и все возможные размещения из 4 элементов множества $D = \{a; b; c; d\}$ по 3 элемента.

Перечислим сочетания из 4 данных элементов по 3. Это все возможные подмножества, содержащие 3 элемента:

$$\{a; b; c\} \qquad \{a; b; d\} \qquad \{a; c; d\} \qquad \{b; c; d\}$$

Всего имеется 4 сочетания из 4 по 3, т. к. эти множества должны отличаться составом элементов. Такие комбинации, как, например, abc и acb, отличающиеся только порядком элементов, представляют собой различные размещения, но одно и то же сочетание.

Выпишем теперь все размещения из 4 по 3:

$$\begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & bad & cad & cbd \\ bca & bda & cda & cdb \\ cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb \end{array}$$

Мы видим, что каждому сочетанию (неупорядоченному множеству элементов) соответствует 6 размещений, различающихся между собой порядком элементов. Всего размещений $A_4^3 = 4 \cdot 6 = 24$.

Заметим, что и в общем случае подсчитать число A_n^m всех возможных размещений из n по m можно следующим образом: сперва найти число всех неупорядоченных множеств, содержащих m элементов из данных n (таких множеств будет

C_n^m), а затем вычислить число возможных перестановок в каждом неупорядоченном множестве (это число равно P_m). Следовательно, по правилу произведения получаем: $A_n^m = C_n^m \cdot P_m = C_n^m \cdot m!$. Отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}^{m\text{ множителей}}}{m!},$$

где $m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Например, $C_6^4 = \dfrac{\overbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}^{\text{4 множителя (начиная с 6)}}}{\underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{4 множителя (начиная с 4)}}} = 15;$

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4; \qquad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6; \qquad C_4^1 = \frac{4}{1} = 4;$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10; \qquad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10; \qquad C_5^1 = \frac{5}{1} = 5.$$

Формулы для A_n^m и C_n^m можно записать следующим образом:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \qquad C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

При решении задач удобно использовать следующие свойства числа сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

Например, $C_6^4 = C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$

Числа C_n^m называют также биномиальными коэффициентами в соответствии с биномом Ньютона

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^m x^m + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m.$

Пример 6. Сколько существует способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования?

Число способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования равно числу способов выбрать трех участников из десяти и разместить их по трем местам (порядок важен), или, иначе говоря, числу размещений из 10 по 3: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Пример 7. а) Сколько существует способов выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 6 роз и 5 гвоздик? б) Сколько существует способов выбрать из этой вазы 1 розу и 2 гвоздики?

а) Поскольку порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из имеющихся $6+5=11$ можно $C_{11}^3 = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1} = 165$ способами.

б) Выбрать одну розу из шести можно $C_6^1 = 6$ способами. На каждый из 6 способов выбора розы приходится $C_5^2 = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ способов выбора двух гвоздик из пяти. По правилу умножения получаем, что выбрать 1 розу и 2 гвоздики можно $C_6^1 \cdot C_5^2 = 6\cdot 10 = 60$ способами.

Следует отметить, что число сочетаний C_n^m используется в тех задачах, где нужно подсчитать число способов в ы б р а т ь что-либо (без учета порядка), а число размещений A_n^m — когда нужно вычислить число способов в ы б р а т ь и р а з м е с т и т ь (т. е. учесть порядок).

1.2. Случайные события. Классическое определение вероятности

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется ***испытанием***. В теории вероятностей рассматриваются ***случайные испытания***, результаты которых нельзя предсказать заранее, а сами испытания можно повторять, хотя бы теоретически, произвольное число раз при неизменном комплексе условий. Случайными испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат (исход) испытания называется ***случайным событием*** (или просто: ***событием***).[1] Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости и т. п. Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании. События A и B называются ***совместными***, если они могут появиться в одном и том же испытании.

Пример 8. Опыт: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков, событие B — появление четного числа очков, событие C — появление нечетного числа очков. События

[1] Строгое определение события требует понятия вероятностного пространства и в данном элементарном изложении ТВ не приводится.

A и B совместны, поскольку число 4 — четное, а значит, если выпало 4 очка, то произошло и событие A (появление четырех очков), и событие B (появление четного числа очков). События A и C несовместны, т. к. если произойдет событие A, то не произойдет событие C, а если произойдет событие C, то не произойдет событие A. События B и C также являются несовместными.

Пример 9. Опыт: один выстрел по мишени. Событие A — попадание в мишень, событие B — промах. События A и B несовместны, поскольку если произошло событие A (стрелок попал в мишень), то событие B (промах во время того же выстрела) уже произойти не может, появление одного события исключает появление другого.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

Пример 10. Опыт: однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, $\ldots$, A_6 — соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. Эти события являются попарно несовместными.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу*** для данного испытания, если они попарно несовместны и в результате испытания обязательно появится одно из них.

События A и B в примере 9 образуют полную группу событий. В примере 10 события A_1, A_2, $\ldots$, A_6 образуют полную группу, а события A_1, A_2, $\ldots$, A_5 — нет.

Для одного и того же испытания можно рассматривать различные полные группы событий. Так, в примере 10 полную группу также образуют события $B = \{$выпадение четного числа очков$\}$ и $C = \{$выпадение нечетного числа очков$\}$. Другой пример полной группы событий в этом же испытании — события B, A_1, A_3, A_5.

Два события A и B называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Противоположные события A и $\overline{A}$ представляют собой простейший случай полной группы событий.

События B и C в примере 8 являются противоположными и образуют полную группу событий; события A и C в примере 8 несовместны, но не являются противоположными.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно обязательно происходит. Событие называется ***невозможным***, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Будем обозначать достоверное событие Ω, а невозможное $\varnothing$.

Пример 11. Испытание: извлечение одного шара из урны, в которой все шары белые. Событие $A = \{$вынут белый шар$\}$ — достоверное событие; событие $B = \{$вынут черный шар$\}$ — невозможное событие.

Несколько событий в данном испытании называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. если условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед остальными.

Так, события A_1, A_2, ..., A_6 в примере 10 являются равновозможными, если предполагается, что кость правильная (однородная и симметричная). События A и B в примере 9, вообще говоря, не являются равновозможными.

Понятие равновозможности событий обычно выражается словами: наудачу, наугад, случайным образом и т. д.

Рассмотрим, как можно численно охарактеризовать возможность появления того или иного случайного события.

Всякое испытание связано с некоторой совокупностью исходов — результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания. Существует простой способ определения вероятности события в случае испытания с конечным[2] числом равновозможных исходов.[3]

Пусть проводится испытание с конечным числом попарно несовместных равновозможных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, образующих полную группу событий. Такие исходы называются ***элементарными исходами***, множество всех элементарных исходов будем обозначать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Элементарный исход ω_i называется ***благоприятствующим*** появлению события A, если наступление исхода ω_i влечет за собой наступление события A.

Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где $m = m_A$ — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n — общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1.}$ Вероятность достоверного события равна еди-

[2]Можно показать, что в дискретном вероятностном пространстве число равновозможных исходов всегда конечно.

[3]Такие испытания описываются классическим вероятностным пространством.

нице: $P(\Omega) = 1$; вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Пример 12. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании правильной монеты. (Монета считается правильной, если она симметричная и однородная, выпадение герба и цифры равновозможны.)

Очевидно, событие $A = \{$выпадение герба$\}$ и событие $B = \{$выпадение цифры$\}$ образуют полную группу несовместных и равновозможных исходов данного испытания. Значит, число всех элементарных исходов n равно 2. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т. е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

При использовании классического определения вероятности для решения задач нужно ответить на следующие вопросы:

— В чем заключается случайный эксперимент?

— Что является множеством элементарных исходов опыта?

— Являются ли эти исходы равновозможными?

— Какие исходы благоприятствуют данному событию?

— Как вычислить общее число элементарных исходов и число исходов, благоприятствующих данному событию?

Пример 13. Опыт: однократное бросание правильной игральной кости. Событие A — появление четырех очков, событие B — появление четного числа очков. Найдем вероятности событий A и B.

Элементарными исходами в этом опыте являются события ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_6$ — соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. — всего 6 элементарных исходов. Эти исходы равновозможны, т. к. кость предполагается правильной. Событию A благоприятствует один элементарный исход ω_4, поэтому $m = 1$, $n = 6$, $P(A) = \dfrac{1}{6}$. Событию B благоприятствуют исходы $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ (если выпало 2, 4 или 6 очков, то выпало четное число очков), для события B имеем: $m = 3$, $n = 6$, $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 14. В коробке находится 8 красных и 12 черных карандашей. Какова вероятность того, что наугад вынутый карандаш будет красным?

Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут красный карандаш. Ясно, что $n = 8 + 12 = 20$ — число всех равновозможных элементарных исходов (можно взять любой карандаш из 20). Число исходов, благоприятствующих событию A, равно $m = 8$ (т. к. красных карандашей 8). Следовательно, $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Статистическая вероятность. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней не равновозможно. В таких случаях иногда используется понятие статистической вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз. Число m называется ***абсолютной частотой*** (или просто ***частотой***) появления события A, а отношение $w(A) = \frac{m}{n}$ называется ***относительной частотой*** появления случайного события A в данной серии опытов.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить, что во многих случаях при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $w(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением числа испытаний в сериях относительная частота приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые (близкие) значения.

Статистической вероятностью события A называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты события A при большом числе опытов (испытаний) n.[4]

Пример 15. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0,485; 0,509; 0,503; 0,536; 0,485; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484. Эти частоты группируются около числа 0,5, поэтому за вероятность выпадения герба в статистическом смысле можно принять число 0,5.

Геометрическая вероятность. Если общее число исходов испытания бесконечно, формула (1) неприменима. Иногда в таких случаях можно воспользоваться другим методом вычисления вероятности, в котором по-прежнему основную роль играет понятие равновозможности событий. Этот метод применяется в задачах, сводящихся к случайному попаданию (бросанию) точки в некоторый геометрический объект (отрезок, плоская или пространственная область и т. п.), геометрическая мера (длина, площадь, объем) которого конечна.

Пусть событие Ω означает, что точка случайным образом попадает во множество Ω и, аналогично, A — точка попадает в подмножество $A \subset \Omega$, причем точка наверняка попадает во множество Ω, т. е. событие Ω достоверно. Пусть далее вероятность $P(A)$ события A пропорциональна геометрической мере μ_A множества A и мера μ_Ω множества Ω конечна. Тогда естественно определить $P(A)$ соотношением

$$P(A) = \frac{\mu_A}{\mu_\Omega}.$$

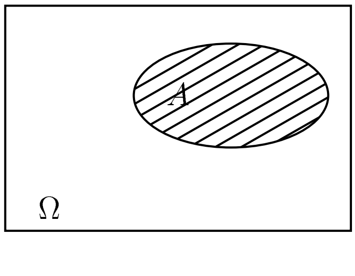


Рис. 3

[4]Это определение не является математически строгим. Можно определить $P(A)$ как $\lim\limits_{n\to+\infty} w(A)$, однако предел следует понимать в вероятностном смысле (см. закон больших чисел).

Пример 16. На отрезке между 30-м и 80-м километром произошел обрыв телефонного кабеля. Найдем вероятность того, что разрыв произошел в наиболее труднодоступной области между 60-м и 70-м км. (Предполагается, что обрыв мог произойти в любом месте и вероятность разрыва на данном участке пропорциональна длине этого участка.)

Длина всего участка (отрезка) равна $l_\Omega = 80 - 30 = 50$, а длина труднодоступной области равна $l_A = 70 - 60 = 10$, поэтому $P(A) = \dfrac{l_A}{l_\Omega} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$.

Пример 17. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 2 см и 4 см соответственно. Найдем вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в малый круг. (Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.)

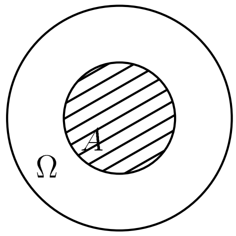


Рис. 4

Площадь большого круга (фигуры Ω) равна $S_\Omega = 4^2\pi = 16\pi$, а площадь малого круга (фигуры A) составляет $S_A = 2^2\pi = 4\pi$ (см. рис. 4), поэтому $P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega} = \dfrac{4\pi}{16\pi} = \dfrac{1}{4}$.

Примеры решения задач

Задача 1. Наудачу брошены три правильные монеты. Какова вероятность того, что только на одной из них выпал герб?

Решение. Обозначим событие A — только на одной монете выпал герб.

События A_1 — выпало три герба, A_2 — выпало два герба и одна цифра, A_3 — выпал один герб и две цифры, A_4 — выпало три цифры — образуют полную группу событий, но не являются равновозможными. Поэтому их нельзя использовать для вычисления вероятности по классическому определению вероятности.

Запишем множество элементарных исходов:

$$\Omega = \{\text{ГГГ}, \text{ГГЦ}, \text{ГЦГ}, \text{ЦГГ}, \text{ЦЦГ}, \text{ЦГЦ}, \text{ГЦЦ}, \text{ЦЦЦ}\}.$$

Эти исходы равновозможны, $n = 8$. Событию A благоприятствуют $m = 3$ элементарных исхода: $A = \{\text{ЦЦГ}, \text{ЦГЦ}, \text{ГЦЦ}\}$. Тогда $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

Задача 2. Наудачу брошены две правильные игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. Обозначим событие A — сумма очков на выпавших гранях — четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Опишем множество элементарных исходов. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, $\ldots$, шесть очков. Такие же 6 вариантов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй» (могло выпасть 1 и 1; 1 и 2; 1 и 3; $\ldots$; 6 и 5; 6 и 6). Таким образом,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1;1); & (1;2); & \ldots; & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & \ldots; & (2;6); \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (6;1); & (6;2); & \ldots; & (6;6) \end{array} \right\}$$

(первым записано число очков, выпавших на «первой» кости, вторым — число очков, выпавших на «второй» кости). Общее число возможных элементарных исходов испытания равно $n = 6 \cdot 6 = 36$. Эти исходы равновозможны.

Благоприятствующими интересующему нас событию A являются следующие 5 исходов: 1) $(2;6)$, сумма очков $2+6=8$; 2) $(4;6)$, сумма $4+6=10$; 3) $(6;2)$, сумма $6+2=8$; 4) $(6;4)$, сумма $6+4=10$; 5) $(6;6)$, сумма $6+6=12$. Поэтому $m=5$ и $P(B) = \dfrac{5}{36}$.

Задача 3. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, случайно утеряна одна деталь, неизвестно какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь (после перевозки) оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.[5]

Решение. а) Пусть событие $A = \{$утеряна стандартная деталь$\}$, событие $B = \{$утеряна нестандартная деталь$\}$. Извлеченная стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных тридцати деталей ($21+10-1=30$), причем среди них было 20 стандартных ($21-1=20$). Число исходов, благоприятствующих событию A, равно 20 (числу стандартных деталей). Общее число исходов равно 30 (числу всех возможных деталей, которые могли быть потеряны). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь, равна $P(A) = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

б) Среди тридцати деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, равна $P(B) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

[5] Речь идет, вообще говоря, об условной вероятности (с учетом того, что извлеченная деталь оказалась стандартной).

Задача 4. Какова вероятность того, что наудачу выбранный четырехзначный цифровой код состоит из различных цифр?

Решение. Обозначим $A = \{$наудачу выбранный четырехзначный цифровой код состоит из различных цифр$\}$. Определим число элементарных исходов. Каждая из четырех цифр кода, независимо от остальных, может быть выбрана 10 способами. На каждый из 10 способов выбора первой цифры приходится 10 способов выбора второй; каждый из $10 \cdot 10 = 100$ способов выбора первых двух цифр сочетается с 10 способами выбора третьей цифры. Учитывая 10 способов выбора четвертой цифры, получаем $n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Эти исходы равновозможны.

Число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, можно подсчитать как число способов выбрать 4 различные цифры из 10 имеющихся и разместить их по 4 местам, т. е. как число размещений из 10 по 4: $m = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Следовательно, $P(A) = \dfrac{5040}{10\,000} = 0,504$.

Задача 5.[6] Имеется 11 карточек с буквами В, Е, Н, О, О, Р, С, Т, Т, Ь, Я. Найдите вероятность того, что: а) получится слово ЯВЬ, если наугад одна за другой выбираются три карточки и раскладываются в порядке появления; б) получится слово СОН; в) получится слово ВЕРОЯТНОСТЬ, если одна за другой выбираются и раскладываются в порядке появления все карточки.

Решение. а) Пусть событие $A = \{$получится слово ЯВЬ$\}$. Элементарными исходами являются все возможные размещения (поскольку важен порядок) трех карточек, выбранных из имеющихся одиннадцати, т. е. $n = A_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Благоприятствует событию A только один исход: первой нужно выбрать карточку с буквой Я, второй — с буквой В, третьей — с буквой Ь. Этот выбор можно осуществить только одним способом, т. к. все эти карточки имеются в единственном экземпляре. Следовательно, $m = 1,\ P(A) = \dfrac{1}{990}$.

б) Событие $B = \{$получится слово СОН$\}$. Снова в качестве элементарных исходов рассмотрим все возможные размещения из 11 карточек по 3, $n = A_{11}^3 = 990$. Событию B благоприятствуют два элементарных исхода, т. к. первая и третья буквы выбираются однозначно, а вторая — О может быть выбрана двумя способами (имеется

[6]Такие задачи удобнее решать с использованием теоремы умножения вероятностей (см. задачу 41).

2 карточки с буквой О), поэтому $m = 2$. Искомая вероятность равна $P(B) = \dfrac{2}{990} = \dfrac{1}{495}$.

в) Событие $C = \{$получится слово ВЕРОЯТНОСТЬ$\}$. Элементарными исходами являются все возможные перестановки 11 карточек, т. е. $n = P_{11} = 11!$. Вычислим число благоприятных исходов. Первой должна быть выбрана буква В, ее можно выбрать только одним способом; также одним способом можно выбрать буквы Е, Р, Я, Н, С, Ь (т. к. такие карточки имеются в единственном экземпляре). Выбор буквы О на 4-е место можно осуществить 2 способами, т. к. есть 2 карточки с буквой О, а выбор буквы О на 8-е место осуществляется единственным способом, т. к. после правильного выбора первых 7 букв остается только одна карточка с буквой О (одну букву О уже выбрали на 4-е место). Точно так же имеется 2 возможности для выбора буквы Т первый раз (на 6-е место) и одна возможность — второй раз (на 10-е место). Получаем:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & \text{В} & \text{Е} & \text{Р} & \text{О} & \text{Я} & \text{Т} & \text{Н} & \text{О} & \text{С} & \text{Т} & \text{Ь} & \\ m= & 1\,\cdot & 1\,\cdot & 1\,\cdot & 2\,\cdot & 1\,\cdot & 2\,\cdot & 1\,\cdot & 1\,\cdot & 1\,\cdot & 1\,\cdot & 1 & =4 \end{array}$$

Следовательно, $P(C) = \dfrac{4}{11!}$.

Задача 6. Имеется 7 карточек с буквами С, О, Б, Ы, Т, И, Е. Наугад взяты 3 карточки. Какова вероятность того, что это карточки Б, Ы, Т?

Решение. Событие $A = \{$выбраны карточки Б, Ы, Т$\}$.

I способ. В качестве равновозможных элементарных исходов можно рассмотреть размещения из 7 карточек по 3 (выбираем одну за другой 3 карточки), $n = A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Тогда число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу всех возможных перестановок 3 карточек с буквами Б, Ы, Т (эти карточки могли появиться в любом порядке), $m = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Таким образом, $P(A) = \dfrac{6}{210} = \dfrac{1}{35}$.

II способ. Т. к. порядок выбора карточек не важен, в качестве равновозможных элементарных исходов рассмотрим сочетания (неупорядоченные выборки) из 7 карточек по 3, тогда $n = C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$. В этом случае событию A благоприятствует один элементарный исход, $m = 1$. Поэтому $P(A) = \dfrac{1}{35}$.

Задача 7. Среди 25 студентов группы, в которой десять девушек, разыгрывается пять билетов. Определите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.

Решение. В группе 25 студентов, из них 10 девушек и 15 юношей. Мы хотим, чтобы 2 билета достались девушкам, а 3 — юношам. Имеем такую схему:

Имеем:	10 девушек	+ 15 юношей	= 25 студентов
Распределить:	2 девушкам	+ 3 юношам	= 5 билетов

Число n элементарных исходов — это число способов распределить 5 билетов среди 25 студентов, или число способов выбрать 5 студентов из 25; следовательно, $n = C_{25}^5$.

Число m благоприятных исходов — это число способов распределить билеты специальным образом — так, чтобы три билета получили юноши и два билета — девушки, т. е. выбрать 3 юношей и 2 девушек. Число групп по трое юношей из 15, которые могут получить билеты, равно C_{15}^3. Каждая такая тройка может сочетаться с любой парой из десяти девушек, а число таких пар равно C_{10}^2. Таким образом, число групп по 5 студентов, в каждую из которых будут входить 3 юношей и 2 девушки, равно произведению $C_{15}^3 \cdot C_{10}^2 = m$. Вычисляя

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455, \quad C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45,$$

$$C_{25}^5 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 53\,130,$$

получим

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{25}^5} = \frac{455 \cdot 45}{53\,130} = \frac{195}{506} \approx 0,385.$$

Задача 8. В урне (емкости) содержится N шаров, из них M белых, остальные — черные. Наудачу вынимают n шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых m белых?

Решение. Имеет место следующая схема:

Имеем:	M белых	$+ \ (N-M)$ черных	$= N$ шаров
Извлечь:	m белых	$+ \ (n-m)$ черных	$= n$ шаров
$P(A) =$	C_M^m	$\cdot \ C_{N-M}^{n-m}$	$/ \ C_N^n$

Число элементарных исходов — это число способов извлечь (выбрать) n шаров из имеющихся N шаров, т. е. C_N^n. Число благоприятных исходов — это число способов извлечь n шаров следующим образом:

выбрать m белых шаров из имеющихся M белых шаров и выбрать $n-m$ черных шаров из имеющихся $N-M$ черных шаров; число благоприятных исходов равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Обозначая через A событие, вероятность которого надо найти, получаем

$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Задача 9. Найдите вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпала на одной (безразлично какой) кости, если известно, что на всех костях выпало различное число очков.[7]

Решение. Поскольку на всех костях выпало различное число очков, то общее число элементарных исходов испытания равно числу способов выбрать 3 различных варианта из шести: одно очко, два очка, ..., шесть очков, т. е. $n=C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$.

Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов выбрать два варианта из оставшихся пяти: одно очко, два очка, ..., пять очков (т. к. на одной кости обязательно должно быть шесть очков и известно, что на всех костях выпало различное число очков). Поэтому $m=C_5^2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$, $P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

Задача 10. (**Задача о встрече.**) Два лица условились встретиться в определенном месте между 17 и 18 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найдите вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

Решение. Для решения задачи используем геометрический метод определения вероятности.

Пусть x — момент прихода первого лица и y — момент прихода второго лица. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Oxy. Областью возможных значений является множество точек $(x;y)$, $0\leqslant x\leqslant 60$, $0\leqslant y\leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), т. е. в качестве фигуры Ω можно рассматривать квадрат со стороной 60 (см. рис. 5).

Событие $A=\{$встреча состоится$\}$ произойдет, если разность между моментами прихода двух лиц будет не более 15 минут (по модулю), т. е. если $|x-y|\leqslant 15$. Таким образом, в качестве фигуры A можно рассматривать заштрихованную полосу между прямыми $x-y=15$ и $x-y=-15$. Площадь полосы вычислим как разность площади квадрата и площадей двух прямоугольных треугольников: $\mu_A=60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot(60-15)^2$. Искомая вероятность равна отношению этой площади к площади всего квадрата, т. е.

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\frac{60^2-(60-15)^2}{60^2}=\frac{7}{16}=0,4375.$$

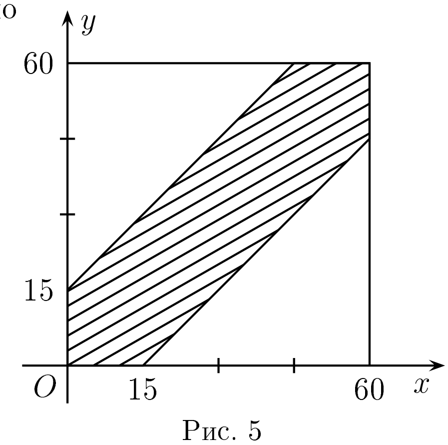


Рис. 5

[7] Здесь, по существу, речь идет об условной вероятности.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 11. Монета случайным образом подброшена два раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Указание. Перечислите все элементарные исходы опыта и выберите благоприятные исходы.

Задача 12. Наугад берутся два натуральных числа. Найдите вероятность того, что их произведение четно.

Указание. Опишите все элементарные исходы опыта, убедитесь в их равновозможности и выберите благоприятные исходы.

Задача 13. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

Указание. Перечислите все элементарные исходы опыта.

Задача 14. Наудачу брошены две игральные кости. Найдите вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна восьми, а разность — четырем; б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем.

Указание. Перечислите все элементарные исходы опыта и выберите благоприятные исходы.

Задача 15. В урне 10 белых, 11 черных, 12 красных шаров. Наугад вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар черный.

Указание. Определите число элементарных исходов и число благоприятных исходов.

Задача 16. На складе хранится 500 аккумуляторов. Известно, что после года хранения в среднем 20 шт. выходит из строя. Определите вероятность того, что наудачу взятый после года хранения аккумулятор окажется исправным, если известно, что после шести месяцев хранения было изъято пять аккумуляторов, ставших неисправными.

Ответьте на вопросы: 1) Сколько равновозможных случаев осталось при произвольном выборе аккумулятора после года хранения, если пять аккумуляторов было изъято ранее? 2) Каково число случаев, благоприятствующих выбору исправного аккумулятора после года хранения?

Задача 17. Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найдите вероятность того, что окажется равным задуманному числу: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

Указание. Опишите элементарные исходы в пунктах а) и б). В чем различие между ними? Какое правило комбинаторики следует использовать для подсчета числа элементарных исходов?

Задача 18. В коробке содержится 5 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

Указание. Опишите множество элементарных исходов. Какую формулу нужно использовать для подсчета числа элементарных исходов опыта? Сколько среди них исходов, при которых номера появляются в порядке возрастания?

Задача 19. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Карточки тасуют и вынимают наугад одну карточку за другой, раскладывая их в том порядке, в котором они появляются. Найдите вероятность того, что получится слово МАТЕМАТИКА.

Ответьте на вопросы: 1) Какую формулу нужно использовать для подсчета числа элементарных исходов опыта, если важен порядок выбора карточек? 2) Каково число благоприятных исходов в данном испытании?

Задача 20. В урне четыре белых и пять черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что один из этих шаров — белый, а другой — черный.

Ответьте на вопросы: 1) Какую формулу нужно использовать для подсчета числа элементарных исходов испытания, если порядок выбора шаров не важен? 2) Какие исходы испытания являются благоприятствующими появлению интересующего нас события? 3) Сколькими способами можно выбрать 1 белый шар? 1 черный шар? 4) Сколькими способами можно выбрать 1 белый и 1 черный шар?

Задача 21. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найдите вероятность того, что среди извлеченных деталей будет только одна окрашенная.

Указание. Найдите число элементарных исходов, учитывая, что порядок извлечения деталей не важен. Какие комбинации трех деталей являются благоприятными исходами в этом испытании?

Задача 22. В пачке содержится 20 карточек, помеченных номерами 101, 102, ..., 120 и произвольно расположенных. Игрок наудачу извлекает две карточки. Найдите вероятность того, что будут извлечены карточки с номерами 101 и 120.

Задача 23. Студент знает 25 вопросов из 30. Найдите вероятность того, что из наудачу взятых трех вопросов экзаменационного билета студент знает: а) все три вопроса, содержащиеся в билете; б) только два вопроса билета.

Задача 24. При приеме партии подвергается проверке половина изделий. Условиями приема допускается бракованных изделий не более 2%. Определите вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

Ответьте на вопросы: 1) Сколько изделий проверяется? При каком количестве обнаруженных бракованных изделий партия будет принята? 2) Сколько имеется бракованных изделий во всей партии?

Задача 25. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

Задача 26. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. В диск случайным образом произведен выстрел. Найдите вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов, если вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и пуля в диск попадает наверняка.

Задача 27. На плоскости проведены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии 8 см. Определите вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 3 см не будет пересечен ни одной линией.

Указания. Обозначив через x расстояние от центра круга до ближайшей прямой, определите область возможных значений величины x. Определите область значений величины x, при которых не будет пересечения прямой с кругом. Чему равны длины отрезков, на которых находятся благоприятствующие и все возможные значения x?

Задача 28. На отрезке OA длиною L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x_1)$ и $C(x_2)$, причем $x_2 \geqslant x_1$. Найдите вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше длины отрезка OB (рис. 6). Предполагается, что вероятность попадания точки на любой отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

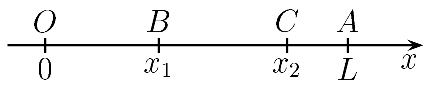


Рис. 6

1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A **или** B (т. е. событие $C = A + B$ происходит, если произошло или событие A, или событие B, или, возможно, оба сразу).

Пример 18. Случайный эксперимент: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень хотя бы одним стрелком (**или** попал первый стрелок, **или** попал второй стрелок, **или** попали оба, главное, что мишень поражена).

Аналогично суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Из определения непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также и сочетательное свойство: $(A+B)+C = A+(B+C)$. Отметим, однако, что $A + A = A$.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли **и** событие A, **и** событие B. Аналогично произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения непосредственно следует, что $AB = BA$. Справедливы также сочетательный и распределительный законы: $(AB)C = A(BC)$, $A(B+C) = AB + AC$. Однако $AA = A$.

Событие C, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называется ***разностью*** событий A и B и обозначается $C = A - B$.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления суммы совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{2}$$

где $P(AB)$ — вероятность произведения (совместного появления) событий A и B.

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, вероятность суммы трех событий

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Более простой вид теорема имеет для случая несовместных событий, т. к. произведение несовместных событий является невозможным событием (они не могут произойти вместе в одном и том же опыте). Вероятность появления суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{3}$$

При решении задач во многих случаях удобно представить событие в виде суммы несовместных событий.

Следствие 1. Вероятность суммы n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, а следовательно, ***вероятность*** события, ***противоположного*** данному, равна разности между единицей и вероятностью данного события, т. е.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вычисление вероятности появления хотя бы одного события из совокупности совместных событий по формуле (2) приводит к громоздким вычислениям. В таком случае можно перейти к противоположному событию. Поскольку противоположным событию

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \{\text{произошло хотя бы одно из событий } A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

является событие

$$\overline{A} = \{\text{не произошло ни одно из событий } A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n,$$

то вероятность появления хотя бы одного из совместных событий

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n).$$

Условная вероятность $P(A|B)$ наступления события A при условии события B — это вероятность наступления события A в результате испытания, если известно, что в этом испытании произошло событие B, т. е. вероятность события A, вычисленная при условии, что осуществилось событие B. Условная вероятность появления события A (при условии появления события B) определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{4}$$

Пример 19. Из урны, в которой 2 белых и 5 черных шаров, наудачу вынимают один за другим два шара. Какова вероятность того, что вторым будет белый шар при условии что первым достали черный шар?

Обозначим: $A =$\{вторым вынули белый шар\}, $B =$\{первым вынули черный шар\}. Нужно найти $P(A|B)$.

I способ. Используем классическое определение вероятности. Поскольку событие B произошло, то в урне осталось $n = 6$ шаров, из которых $m = 2$ белых. Поэтому $P(A|B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

II способ. Используем формулу (4). Очевидно, что $P(B) = \dfrac{5}{7}$.

Вычислим вероятность события $AB = \{$первым вынули черный шар, а вторым — белый$\}$, используя классическое определение вероятности. Поскольку важен порядок появления шаров, то $n = A_7^2 = 42$. Событию AB благоприятствуют те исходы, при которых первым выбирают черный шар (это можно сделать 5 способами), а вторым — белый шар (это можно сделать 2 способами), поэтому $m = 5 \cdot 2 = 10$. Следовательно, $P(AB) = \dfrac{10}{42} = \dfrac{5}{21}$, $P(A|B) = \dfrac{5/21}{5/7} = \dfrac{1}{3}$.

С определением условной вероятности (4) связана теорема умножения вероятностей.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на (условную) вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Более простой вид теорема умножения вероятностей имеет для независимых событий.

Событие A называется ***независимым*** от события B, если $P(A|B) = P(A)$, т. е. если вероятность появления события A не зависит от появления или непоявления события B. При этом если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, поэтому говорят просто, что события A и B независимы.

Пример 20. Опыт: игральную кость случайным образом подбросили два раза. Покажем, что события $A = \{$первый раз выпало 6 очков$\}$ и $B = \{$второй раз выпало 6 очков$\}$ независимы.

Число элементарных исходов опыта равно $n = 36$ (множество элементарных исходов такое же, как в задаче 2). Вычислив вероятность события A, получим $m = 6$, $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Аналогично, $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Событию $AB = \{$оба раза выпало 6 очков$\}$ благоприятствует один элементарный исход $(6;6)$, поэтому $P(AB) = \dfrac{1}{36}$ и

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{1/36}{1/6} = \dfrac{1}{6}$. Таким образом, поскольку $P(A|B) = P(A)$, события A и B независимы.

Можно показать, что если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

На практике о независимости тех или иных событий часто судят, исходя из интуитивных соображений и анализа условий опыта, считая независимыми события, «между которыми нет причинно-следственной связи».

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух **независимых** событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{5}$$

Следствие. Вероятность появления нескольких событий, **независимых в совокупности**, равна произведению вероятностей этих событий.

Несколько событий называют *независимыми в совокупности* или просто *независимыми*, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.

Заметим, что из попарной независимости событий (любые два из них независимы) не следует их независимость в совокупности.

Пример 21. Имеется четыре флажка: красный, синий, черный и трехцветный (красный с синим и черным). Наудачу выбирается один флажок. Исследуем на независимость события: $A = \{$выбранный флажок имеет красный цвет$\}$, $B = \{$выбранный флажок имеет синий цвет$\}$, $C = \{$выбранный флажок имеет черный цвет$\}$.

Вычислим вероятность события A. Число равновозможных элементарных исходов опыта равно $n = 4$, т. к. всего имеется четыре флажка. Событию A благоприятствуют два исхода (красный цвет имеется у двух флажков). Поэтому $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Событию $AB = \{$выбранный флажок имеет и красный, и синий цвет$\}$ благоприятствует один исход, поэтому $P(AB) = \frac{1}{4}$. Отсюда $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$. Поскольку $P(A|B) = P(A)$, события A и B независимы. Аналогично доказывается попарная независимость событий A и C, B и C.

Однако эти события не являются независимыми в совокупности. Покажем это, вычислив $P(C|AB) = \dfrac{P(ABC)}{P(AB)}$. Событию $ABC = \{$выбранный флажок имеет и красный, и синий, и черный цвет$\}$ благоприятствует один исход — выбор трехцветного флажка, поэтому $P(ABC) = \frac{1}{4}$. Тогда $P(C|AB) = \dfrac{1/4}{1/4} = 1 \neq \dfrac{1}{2}$. Поскольку $P(C|AB) \neq P(C)$, то события C и AB не являются независимыми, а следовательно, события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (***гипотез***) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности:**

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n). \quad (6)$$

Напомним, что $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$ для событий, образующих полную группу.

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть пересчитаны по **формуле Байеса**: если вероятности гипотез до опыта были $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A, то условная вероятность $P(H_k|A)$ гипотезы H_k при условии осуществления события A вычисляется по формуле

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}. \quad (7)$$

Типичная формулировка задач на формулу Байеса содержит следующую особенность: в начале повествования ведется речь о том, что стал известным результат испытания, а затем просят переоценить вероятности гипотез.

Примеры решения задач

Задача 29. Из коробки, в которой 8 красных и 12 черных карандашей, трижды наугад извлекают по одному карандашу. Найдите вероятность того, что все три раза будут извлечены черные карандаши, если выборка производится: а) без возвращения; б) с возвращением.

Решение. Обозначим события: $A = \{$извлекли три раза черный карандаш$\}$; $A_1 = \{$1-й раз извлекли черный карандаш$\}$; $A_2 = \{$2-й раз извлекли черный карандаш$\}$; $A_3 = \{$3-й раз извлекли черный карандаш$\}$. Тогда $A = A_1A_2A_3$.

а) По формуле умножения вероятностей получаем:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

Используя классическое определение вероятности, вычислим: $P(A_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; $P(A_2|A_1) = \frac{11}{19}$, т. к. после первого извлечения в коробке оставалось $n = 19$ карандашей, из которых (когда произошло событие A_1) $m = 11$ черных карандашей; $P(A_3|A_1A_2) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, т. к. после второго извлечения оставалось $n = 18$ карандашей, из которых $m = 10$ черных (когда произошли события A_1 и A_2). Следовательно, $P(A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{11}{57} \approx 0,193.$

б) В случае выборки с возвращением события A_1, A_2 и A_3 независимы, поскольку при каждом извлечении в коробке оказывается $n = 20$ карандашей, из которых $m = 12$ черных. Поэтому

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0,216.$$

Задача 30. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны $0,6$ и $0,7$. Найдите вероятность появления ровно одного из этих событий.

Решение. Обозначим событие $A = \{$осуществится только одно из событий A_1, $A_2\}$. В результате опыта произойдет одно из следующих попарно несовместных событий: $B_0 = \{$не осуществится ни одно из событий A_1, $A_2\}$, $B_1 = \{$появится только событие $A_1\}$, $B_2 = \{$появится только событие $A_2\}$, $B_3 = \{$осуществятся оба события A_1 и $A_2\}$. Эти события образуют полную группу событий, $\Omega = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$ (см. рис. 7). Событие A есть сумма двух несовместных событий B_1 и B_2, т. е. $A = B_1 + B_2$ (появится либо только событие A_1, либо только событие A_2). Поскольку события B_1 и B_2 несовместны, то $P(A) = P(B_1) + P(B_2)$.

$$\boxed{\Omega = B_0 + \overbrace{B_1 + B_2}^{A} + B_3}$$

Рис. 7

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A}_2$ (появилось первое событие и не появилось второе), т. е. $B_1 = A_1\overline{A}_2$. Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A}_1A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т. е. $B_2 = \overline{A}_1A_2$. События A_1 и A_2 независимы, а следовательно, независимы события A_1 и $\overline{A}_2$, а также $\overline{A}_1$ и A_2, поэтому по теореме умножения:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) = 0,6 \cdot (1 - 0,7) = 0,18;$$

$$P(B_2) = P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2) = (1 - 0,6) \cdot 0,7 = 0,28.$$

Отсюда вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2 равна $P(A) = P(B_1) + P(B_2) = 0,18 + 0,28 = 0,46$ (см. рис. 8).

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccc} A & = & B_1 & \text{или} & B_2 & = & (A_1 & \text{и} & \overline{A}_2) & \text{или} & (\overline{A}_1 & \text{и} & A_2) & \\ A & = & B_1 & + & B_2 & = & A_1 & \cdot & \overline{A}_2 & + & \overline{A}_1 & \cdot & A_2 & \\ P(A) & = & P(B_1) & + & P(B_2) & = & 0,6 & \cdot & (1-0,7) & + & (1-0,6) & \cdot & 0,7 & = 0,46 \end{array}}$$

Рис. 8

Задача 31. Студент должен сдать за неделю три зачета (независимо друг от друга). Вероятность сдачи этим студентом зачета по первому предмету равна 0,8, по второму — 0,6, по третьему — 0,5.

Найдите вероятность того, что: а) студент сдаст по крайней мере два зачета; б) хотя бы один зачет.

Решение. Обозначим события $A = \{$студент сдаст по крайней мере два зачета$\}$, $B = \{$студент сдаст хотя бы один зачет$\}$. Известны вероятности событий $A_i = \{$студент сдаст зачет по i-му предмету$\}$ ($i = 1$, 2, 3): $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,6$, $P(A_3) = 0,5$.

В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий $B_i = \{$студент сдаст ровно i зачетов$\}$ ($i = 0$, 1, 2, 3). Представим события A и B через эти события (см. рис. 9).

$$\Omega = \underset{\overline{B}}{\underset{\|}{B_0}} + \underbrace{B_1 + \overbrace{B_2 + B_3}^{A}}_{B}$$

Рис. 9

а) Событие A произойдет в том случае, если студент сдаст ровно 2 зачета (осуществится событие B_2) или все 3 зачета (осуществится событие B_3), т. е. $A = B_2 + B_3$. Выразим эти события через A_1, A_2, A_3. Осуществление события B_3 равносильно осуществлению всех трех событий A_1, A_2 и A_3, т. е. $B_3 = A_1 A_2 A_3$. Событие B_2 означает, что студент сдаст ровно два зачета, а один не сдаст. Представим B_2 в виде суммы несовместных событий: либо студент не сдаст только первый зачет (произойдет $\overline{A}_1 A_2 A_3$), либо студент не сдаст только второй зачет (произойдет $A_1 \overline{A}_2 A_3$), либо студент не сдаст только третий зачет (произойдет $A_1 A_2 \overline{A}_3$) (см. рис. 10).

$B_2 =$	($\overline{A}_1$ и	A_2 и	A_3) или	(A_1 и	$\overline{A}_2$ и	A_3) или	(A_1 и	A_2 и	$\overline{A}_3$)
$B_2 =$	$\overline{A}_1$ $\cdot$	A_2 $\cdot$	A_3 +	A_1 $\cdot$	$\overline{A}_2$ $\cdot$	A_3 +	A_1 $\cdot$	A_2 $\cdot$	$\overline{A}_3$
$P(B_2) =$	$(1-0,8)$ $\cdot$	$0,6$ $\cdot$	$0,5$ +	$0,8$ $\cdot$	$(1-0,6)$ $\cdot$	$0,5$ +	$0,8$ $\cdot$	$0,6$ $\cdot$	$(1-0,5)$

Рис. 10

Таким образом, $A = B_2 + B_3 = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3$. Поскольку эти четыре события несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы и $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,2$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0,4$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0,5$, то

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,7.$$

б) Событие $B = B_1 + B_2 + B_3$ — студент сдаст либо только один зачет, либо только два зачета, либо все три зачета. Для вычисления вероятности этого события удобнее перейти к противоположному событию $\overline{B} = B_0 = \{$студент не сдаст ни одного зачета$\}$. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = 1 - 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,96.$$

Задача 32. Три стрелка делают независимо друг от друга по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка

0,6, для второго — 0,8, для третьего — 0,9. Рассмотрим события $A = \{$в мишень попал только один стрелок$\}$, $B = \{$в мишени не менее двух пробоин$\}$, $C = \{$в мишени не более двух пробоин$\}$. В чем состоят события $A + B, AB, A + C, AC, B + C, BC$? Найдите вероятности событий $A, C, AC, BC, A + C$. Являются ли события B и C несовместными? противоположными?

Решение. В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий $B_i = \{$в мишени ровно i пробоин$\}$ ($i = 0$, 1, 2, 3). Эти события образуют полную группу событий, $\Omega = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$. Представим данные события A, B, C в виде суммы несовместных событий (см. рис. 11):

$$\Omega \;=\; \underbrace{B_0 \;+\; \overset{\overset{A}{\|}}{B_1} \;+\; \rlap{$\overbrace{}^{B}$}B_2}_{C} \;+\; B_3$$

Рис. 11

$$A = B_1, \quad B = B_2 + B_3, \quad C = B_0 + B_1 + B_2.$$

Учитывая определения суммы событий (должно иметь место хотя бы одно из событий-слагаемых) и произведения (должно произойти каждое из событий-множителей), запишем комбинации событий A, B и C следующим образом:

$A + B = B_1 + B_2 + B_3 = \{$хотя бы один попал$\}$;
$AB = \varnothing$ (невозможное событие);
$A + C = B_0 + B_1 + B_2 = C$;
$AC = B_1 = A$;
$B + C = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = \Omega$ (достоверное событие);
$BC = B_2 = \{$в мишени ровно две пробоины$\}$.

События B и C не являются несовместными, т. к. в случае исхода B_2 осуществится и событие B, и событие C. События B и C не являются противоположными, т. к. хотя и исчерпывают все возможные исходы опыта (их сумма равна достоверному событию), но не являются несовместными.

Для вычисления вероятностей введем события $A_i = \{i$-й стрелок попал$\}$ ($i = 1, 2, 3$), вероятности которых известны: $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,8$, $P(A_3) = 0,9$.

Выразим событие $A = \{$только один стрелок попал$\}$ через A_1, A_2, A_3, для этого представим его в виде суммы несовместных событий: либо попал только первый стрелок (произошло событие $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо попал только второй стрелок (произошло $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$), либо попал только третий стрелок (произошло $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$), т. е.

$$A = B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Поскольку события-слагаемые несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,116.$$

Для вычисления вероятности события $C = \{$не более двух попаданий$\}$ удобнее перейти к противоположному событию $\overline{C} = \{$более двух попаданий$\} = \{$три попадания$\}$. Итак, событие $\overline{C}$ произойдет в том случае, когда попадет каждый из трех стрелков, т. е. $\overline{C} = A_1 A_2 A_3$, $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 1 - 0,432 = 0,568$.

Вычислим вероятности суммы $A + C$ и произведения AC.

I способ. По теореме умножения вероятностей, $P(AC) = P(A)P(C|A)$. Вероятность $P(C|A)$ — это вероятность события C при условии, что произошло событие A, т. е. вероятность того, что в мишени не более двух пробоин, если известно, что в мишени ровно одна пробоина. Если событие A произошло, то и событие C тоже произошло, поэтому $P(C|A) = 1$, и $P(AC) = 0,116 \cdot 1 = 0,116$.

По теореме сложения вероятностей, $P(A + C) = P(A) + P(C) - P(AC) = 0,116 + 0,568 - 0,116 = 0,568$.

II способ. Для вычисления вероятностей суммы $A + C$ и произведений AC, BC удобнее использовать представления этих событий через несовместные события B_0, B_1, B_2, B_3. Поскольку $AC = A$, $A + C = C$, то $P(AC) = P(A) = 0,116$, $P(A + C) = P(C) = 0,568$. Учитывая, что $BC = B_2 = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3$, получаем $P(BC) = P(B_2) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,444$.

Задача 33. На трех автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% вторым и 45% — третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором — 0,988 и на третьем — 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определите вероятность того, что наудачу взятая деталь не соответствует стандарту.

Решение. Пусть событие $A = \{$наудачу выбранная деталь не соответствует стандарту$\}$. Известны вероятности события A при условии, что деталь изготовлена на 1-м, 2-м, 3-м станках. В этом случае для вычисления безусловной вероятности события A используют формулу полной вероятности (6).

Введем гипотезы: $H_i = \{$выбранная деталь изготовлена на i-м станке$\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Из условий задачи легко находятся следующие вероятности для некоторой детали, выбранной случайно из всей дневной продукции:

$$P(H_1) = 0,3; \qquad P(A|H_1) = 1 - 0,99 = 0,01;$$
$$P(H_2) = 0,25; \qquad P(A|H_2) = 1 - 0,988 = 0,012;$$
$$P(H_3) = 0,45; \qquad P(A|H_3) = 1 - 0,98 = 0,02.$$

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

По формуле полной вероятности (6) находим вероятность того, что наудачу взятая деталь не соответствует стандарту:

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,012 + 0,45 \cdot 0,02 = 0,015.$$

Задача 34. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из урны наудачу извлечен один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым, если все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны.

Решение. Обозначим событие $A = \{$извлечен белый шар$\}$. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: $H_1 = \{0$ белых шаров$\}$, $H_2 = \{1$ белый шар$\}$, $H_3 = \{2$ белых шара$\}$. Эти гипотезы образуют полную группу событий. Поскольку всего имеется 3 гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице, то вероятность каждой из гипотез равна $\frac{1}{3}$, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Мы можем найти вероятность события A, если известно, сколько белых шаров было в урне, т. е. можем определить условные вероятности A при условии гипотез H_1, H_2, H_3. Зная условные вероятности, можно вычислить вероятность события A по формуле полной вероятности (6).

Определим условные вероятности $P(A|H_i)$, используя классическое определение вероятности. Число элементарных исходов равно $n = 2 + 1 = 3$ (изначально в урне было два шара, затем добавили еще один). В случае гипотезы H_1 в урну, в которой не было белых шаров, опустили один белый шар, поэтому $m = 1$, $P(A|H_1) = \frac{1}{3}$. При выполнении гипотезы H_2 в урне имеется $m = 1 + 1 = 2$ белых шара, $P(A|H_2) = \frac{2}{3}$. При выполнении гипотезы H_3 имеется $m = 2+1 = 3$ белых шара, $P(A|H_3) = \frac{3}{3} = 1$. Тогда $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

Задача 35. Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Найдите вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

Решение. Обозначим событие $A = \{$наудачу взятая деталь отличного качества$\}$. Известны условные вероятности события A при условии, что деталь изготовлена 1-м или 2-м автоматом. Можно сделать два предположения (гипотезы): $H_i = \{$деталь произведена i-м автоматом$\}$ $(i = 1,\, 2)$. Тогда $P(A|H_1) = 0,6,\ P(A|H_2) = 0,84$. Найдем вероятности гипотез. Пусть 2-й автомат производит k деталей, тогда 1-й производит $2k$ деталей — всего $3k$ деталей, поэтому $P(H_1) = \dfrac{2k}{3k} = \dfrac{2}{3}$, $P(H_2) = \dfrac{k}{3k} = \dfrac{1}{3}$. Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности (6) равна $P(A) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,6 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68$.

Задача 36. Один из трех стрелков случайным образом вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго — 0,5, для третьего — 0,8. Мишень не поражена. Найдите вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы: на линию огня вызван первый стрелок (H_1); второй стрелок (H_2); третий стрелок (H_3). Поскольку вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то вероятности этих гипотез до опыта $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие A — после произведенных двух выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1, H_2 и H_3 определим по теореме умножения вероятностей: $P(A|H_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$; $P(A|H_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$; $P(A|H_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$. По формуле Байеса (7) находим вероятность гипотезы H_1 после опыта:

$$P(H_1|A) = \frac{0,49 \cdot \frac{1}{3}}{0,49 \cdot \frac{1}{3} + 0,25 \cdot \frac{1}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{0,49}{0,78} \approx 0,628.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 37. Прибор состоит из четырех блоков. Вероятность того, что каждый блок будет работать в течение года, равна 0,9. Какова вероятность того, что прибор будет работать в течение этого года, если выход из строя каждого блока означает выход из строя прибора и известно, что блоки выходят из строя независимо друг от друга.

Ответьте на вопросы: 1) Чему равны вероятности событий $A_i = \{i$-й блок не выйдет из строя в течение года$\}$ $(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$? 2) Зависимы ли события A_1, A_2, A_3,

A_4? 3) Как выразить событие $A = \{$прибор будет работать в течение года$\}$ через события A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)? 4) Чему равна вероятность произведения независимых событий?

Задача 38. Техническое устройство, состоящее из пяти узлов, работает в течение некоторого времени t. За это время первый узел, независимо от других, может оказаться неисправным с вероятностью 0,1, второй — с вероятностью 0,15, третий — с вероятностью 0,12, четвертый и пятый — с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что за время работы хотя бы один узел технического устройства станет неисправным.

Указание. Найдите вероятность противоположного события, выразив его через события $A_i = \{i$-й узел окажется неисправным$\}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Задача 39. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найдите вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

Ответьте на вопросы: 1) Какое событие должно иметь место для того, чтобы был произведен четвертый выстрел? 2) Чему равна вероятность этого события? 3) Будет ли это событие противоположно тому событию, что произведено не более трех выстрелов?

Задача 40. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных, а во второй соответственно 10 и 8. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность извлечь белый шар из 1-й урны? из 2-й урны? 2) Зависит ли вероятность извлечения белого шара из 2-й урны от того, какой шар извлекли из 1-й урны? 3) Совместны ли события $B_1 = \{$извлекли 2 белых шара$\}$ и $B_2 = \{$извлекли 2 черных шара$\}$? 4) В чем заключается событие $B_1 + B_2$?

Задача 41. Имеется 11 карточек с буквами В, Е, Е, И, И, Н, Р, С, Т, Т, У. Найдите вероятность того, что получится слово: а) ТУР, если наугад вынимают три карточки и раскладывают в порядке появления; б) СЕВЕР, если раскладывают в порядке вынимания 5 карточек; в) УНИВЕРСИТЕТ, если все карточки раскладываются в порядке вынимания.

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность первой выбрать карточку с буквой Т? 2) Какова вероятность второй выбрать букву У, если первой была выбрана буква Т? 3) Чему равна вероятность того, что третьей будет выбрана карточка с буквой Р, если уже выбраны карточки Т и У?

Задача 42. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Указание. Представьте событие $A = \{$при аварии сработает только один сигнализатор$\}$ в виде суммы несовместных событий.

Задача 43. Машина при проверке проходит три вида испытаний. Первое испытание она проходит успешно в 90%, второе — в 80% и третье — в 75% случаев. Найдите вероятность того, что машина пройдет успешно испытания только одного вида.

Указание. Зависимы ли события $A_i = \{$машина пройдет успешно i-е испытание$\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$? Чему равны вероятности событий A_i? Представьте событие $A = \{$машина пройдет успешно испытания только одного вида$\}$ в виде суммы несовместных событий.

Задача 44. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 0,5% каблуков, 2% подметок и 4% верхов. Произведенные каблуки, подметки и верхи случайно комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Найдите вероятность того, что изготовленная пара ботинок будет содержать дефекты.

Ответьте на вопросы: 1) Зависимы ли события A_1, A_2 и A_3, заключающиеся соответственно в том, что не испорчена наугад взятая пара верхов, подметок и каблуков? Чему равны вероятности этих событий? 2) Что выражает событие $A_1A_2A_3$ и чему равна его вероятность? 3) Какое событие должно иметь место, чтобы пара ботинок не содержала дефектов? Как выразить это событие через A_1, A_2 и A_3? Чему равна его вероятность?

Задача 45. Производится стрельба по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8; при каждом последующем выстреле вероятность уменьшается в 2 раза. Произведено 3 выстрела. Определите вероятности следующих событий: $A = \{$ровно два попадания$\}$; $B = \{$хотя бы одно попадание$\}$.

Указание. Представьте событие A в виде суммы несовместных событий; для вычисления вероятности события B перейдите к противоположному событию.

Задача 46. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найдите вероятность того, что среди взятых книг окажется в переплете: а) не менее двух; б) хотя бы одна.

Указания. Представьте событие $A = \{$среди взятых книг не менее двух будут в переплете$\}$ и $B = \{$хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете$\}$

в виде суммы несовместных событий. Для вычисления вероятности события B перейдите к противоположному событию.

Задача 47. В электрическую цепь включены три лампочки. Вероятность того, что первая лампочка исправна, равна 0,9, вторая — 0,8 и третья — 0,7. Какова вероятность того, что при замыкании в цепи будет ток, если лампочки включены: а) последовательно; б) параллельно?

Указание. Для того чтобы в цепи был ток, должны быть исправны: а) все три лампочки; б) хотя бы одна лампочка.

Задача 48. В ящике содержится 12 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2, 18 деталей завода № 3. Вероятность того, что деталь завода № 1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов № 2 и № 3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

Указания. Используйте формулу полной вероятности. Введите три гипотезы относительно происхождения выбранной детали. Чему равны вероятности этих гипотез? Чему равны условные вероятности извлечения детали отличного качества при выполнении каждой из возможных гипотез?

Задача 49. В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Указание. Какие две гипотезы образуют полную группу событий? Вычислите вероятности этих гипотез, используя классическое определение вероятности.

Задача 50. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в количественном отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока в 98%, 88% и 92% случаев. Найдите вероятность того, что приобретенный в этой фирме телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Ответьте на вопросы: 1) Какие три гипотезы о происхождении наугад взятого телевизора возможны? 2) Каковы вероятности этих гипотез, если известно, что продукция разных поставщиков поступает в торговую фирму в разном объеме? 3) Каковы для каждого из поставщиков вероятности того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока?

Задача 51. В 1-м ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во 2-м — 30 деталей, из них 24 стандартных; в 3-м — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найдите вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

Ответьте на вопросы: 1) От каких гипотез зависит вероятность того, что наудачу извлеченная деталь стандартная? 2) Являются ли эти гипотезы равновероятными?

Задача 52. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

Указание. Используйте формулу полной вероятности. Каковы возможные предположения (гипотезы) о количестве белых шаров в третьей урне? Чему равны вероятности этих гипотез? Чему равны условные вероятности появления белого шара из третьей урны при выполнении каждой из возможных гипотез?

Задача 53. В группе из 20 человек имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего — 0,7, для посредственного — 0,5. На линию огня вызываются наугад два стрелка. Они производят по одному выстрелу. Найдите вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.

Ответьте на вопросы: 1) Какие возможны гипотезы о двух стрелках, вызванных на линию огня? 2) Чему равны вероятности этих гипотез? 3) Чему равны условные вероятности поражения цели обоими стрелками при выполнении каждой из гипотез?

Задача 54. В пирамиде установлено 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок, выстрелив из наудачу взятой винтовки, поразил мишень. Что вероятнее: выстрел произведен из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Указание. Используйте формулу Байеса. От чего зависит вероятность попадания стрелком в мишень?

Задача 55. Имеется две урны. В первой урне три белых и четыре черных шара, во второй — два белых и три черных шара. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую урну два шара, а затем из второй урны наугад вынимают один шар. Он оказался белым. Какой состав переложенных шаров является наиболее вероятным?

Ответьте на вопрос: Какие возможны предположения о составе переложенных шаров?

Задача 56. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось одно попадание. Определите вероятность того, что попал первый стрелок.

Ответьте на вопросы: 1) Какие возможны результаты трех выстрелов? 2) При каких из них будет только одно попадание? 3) Какова вероятность того, что будет только одно попадание, если 1-й стрелок попал, а 2-й и 3-й не попали? Какова вероятность того, что будет только одно попадание, если 1-й стрелок промахнулся, а 2-й и 3-й попали?

Задача 57. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, восемь подготовлены отлично, шесть — хорошо, четыре — посредственно и два — плохо. В экзаменационных билетах содержится 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, может ответить на все вопросы, хорошо — на 35, посредственно — на 25, плохо — на 10 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найдите вероятность того, что этот студент подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

Указание. Введите 4 гипотезы об уровне подготовки вызванного студента. Как найти вероятность того, что студент ответил на три произвольно заданных вопроса, зная, на сколько вопросов он может ответить?

1.4. Повторение испытаний. Схема Бернулли

Независимые опыты могут производиться в одинаковых или разных условиях. В первом случае вероятность появления данного события во всех опытах будет одна и та же, а во втором вероятность события меняется от опыта к опыту.

Последовательность n независимых в совокупности испытаний называется ***схемой Бернулли,*** если при каждом испытании возможны только два исхода: появление события A (успех) и его непоявление $\overline{A}$ (неуспех), причем вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p.

В схеме Бернулли вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, вычисляется по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{8}$$

где $q = 1 - p$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $0! = 1$.

При б о л ь ш и х значениях n для вычисления вероятностей $P_n(m)$ используются приближенные формулы Пуассона и Муавра – Лапласа.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний о ч е н ь м а л а, а число испытаний n д о с т а т о ч н о в е л и к о, то вероятность $P_n(m)$ вычисляется приближенно по ***формуле Пуассона:***

$$P_n(m) \approx \frac{a^m \cdot \mathrm{e}^{-a}}{m!}, \qquad a = np. \tag{9}$$

Формулу (9) обычно применяют в тех случаях, когда $a \leqslant 10$.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1, а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(m)$ также можно использовать формулу Пуассона. При этом находят вероятность того, что событие $\overline{A}$ произойдет $n - m$ раз.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n испытаний существенно отличается от 0 и 1, а число испытаний n достаточно велико, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяют приближенную ***локальную формулу Муавра – Лапласа***:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (10)$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса, $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geqslant 4$.

Если в схеме Бернулли p существенно отличается от 0 и 1, а n достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m < m_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 раз, но менее m_2 раз, вычисляется по ***интегральной формуле Муавра – Лапласа:***

$$P_n(m_1 \leqslant m < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (11)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа, $x_2 = \dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x \geqslant 5$.

Для функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ составлены таблицы (см. приложения 1 и 2).

Формулы Муавра – Лапласа, как правило, используются, если $0,1 < p < 0,9$, и дают хорошие результаты, если npq велико (можно считать $npq \geqslant 20$).

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n опытах, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p (и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$), определяется из двойного неравенства

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p. \qquad (12)$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p, то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geqslant \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \qquad (13)$$

Примеры решения задач

Задача 58. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдите вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) ровно четыре; б) не менее четырех.

Решение. а) Мы имеем схему Бернулли с $n = 5$ испытаниями (посеяно пять семян). Событие $A = \{\text{семя взошло}\}$. По условию задачи $p = P(A) = 0,9$, тогда $q = 1 - p = 0,1$. Искомую вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли (8):

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 5 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,32805.$$

б) Искомое событие состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P_5(m \geqslant 4) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое найдено. Для вычисления второго слагаемого применяем снова формулу (8):

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 1 \cdot 0,9^5 \cdot 1 = 0,59049.$$

Следовательно, $P_5(m \geqslant 4) = 0,32805 + 0,59049 = 0,91854$.

Задача 59. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найдите вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Пусть событие B — хотя бы одно попадание. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, т. е. события $\overline{B}$ — ни одного попадания в мишень. В данном примере $n = 6$; $p = 0,4$; $q = 1 - p = 0,6$. Применяя формулу (8), получаем

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) = 1 - 0,6^6 \approx 0,953.$$

Задача 60. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найдите вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно три абонента, б) менее трех абонентов, в) более трех абонентов; г) хотя бы один абонент.

Решение. По условию $n = 100$, $p = 0,01$. Поскольку число n велико, вероятность p мала, рассматриваемые события (звонки абонентов) независимы, то применима формула Пуассона (9). Найдем $a = np = 100 \cdot 0,01 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что позвонят ровно 3 ($m = 3$) абонента: $P_{100}(3) \approx \dfrac{1^3 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{3!} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{6} \approx \dfrac{0,36788}{6} \approx 0,0613$.

б) Найдем вероятность того, что позвонят менее трех абонентов, т. е. либо два, либо один, либо ни одного:

$$P_{100}(m \leqslant 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) \approx \frac{1^0 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{2!} =$$
$$= \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0,36788 = 0,9197.$$

в) Найдем вероятность $P_{100}(m > 3)$ того, что позвонят более трех абонентов. События $\{m > 3\} = \{\text{позвонят более трех абонентов}\}$ и

$\{m \leqslant 3\} = \{$позвонят не более трех абонентов$\}$ — противоположные, поэтому

$P_{100}(m > 3) = 1 - P_{100}(m \leqslant 3) = 1 - (P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3)).$

Пользуясь результатами пунктов а) и б), получим $P_{100}(m > 3) \approx \approx 1 - (0,9197 + 0,0613) = 0,019.$

г) Найдем вероятность $P_{100}(m \geqslant 1)$ того, что позвонит хотя бы один абонент. События $\{m \geqslant 1\} = \{$позвонит хотя бы один абонент$\}$ и $\{m < 1\} = \{$ни один абонент не позвонит$\}$ — противоположные, поэтому

$$P_{100}(m \geqslant 1) = 1 - P_{100}(m < 1) = 1 - P_{100}(0) \approx 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,6321.$$

Задача 61. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,6. Найдите вероятность того, что событие A в этих испытаниях наступит: а) ровно 330 раз; б) не менее 330 и не более 375 раз.

Решение. а) По условию задачи $n = 600$ — велико; $p = 0,6$ — не очень мало; $q = 1 - p = 0,4$; $m = 330$. Применим локальную формулу Муавра – Лапласа (10). Определяем значение x:

$$x = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{30}{12} = -2,5.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (приложение 1) находим $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,0175$. По формуле (10) найдем искомую вероятность:

$$P_{600}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0175 = \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,0015.$$

б) В этом случае применима интегральная формула Муавра – Лапласа (11). По условию задачи $n = 600$; $p = 0,6$; $m_1 = 330$; $m_2 = = 375$. Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5; \quad x_2 = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (приложение 2) находим, что $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) \approx -0,4938$; $\Phi(1,25) \approx 0,3944$. По формуле (11) искомая вероятность $P_{600}(330 \leqslant m \leqslant 375) \approx \Phi(1,25) - -\Phi(-2,5) \approx 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$

Задача 62. При установившемся технологическом процессе 80% всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найдите наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 250 изделий.

Решение. Из неравенства (12) при $n = 250$, $p = 0,8$ и $q = 0,2$ получаем $199,8 \leqslant m_0 \leqslant 200,8$. Поскольку m_0 может быть только целым числом, то $m_0 = 200$.

Задача 63. За один час, равномерно работая, автомат изготовляет 20 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали 0,01. При каком времени работы автомата вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,952?

Решение. Применяя формулу (13), найдем количество n изготовляемых деталей, при котором с вероятностью $P = 0,952$ можно утверждать о наличии по крайней мере одной бракованной детали; если вероятность брака $p = 0,01$, то $n \geqslant \dfrac{\ln(1-0,952)}{\ln(1-0,01)} = \dfrac{\ln 0,048}{\ln 0,99} \approx 302,13$. Следовательно, за время $t \approx \dfrac{302,13}{20} \approx$ $\approx 15,1$ ч автомат с вероятностью 0,952 изготовляет по крайней мере одну бракованную деталь.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 64. Вероятность выигрыша по облигации займа за время его действия 0,25. Найдите вероятность того, что из 8 случайным образом приобретенных облигаций 6 будет выигрышных.

Ответьте на вопросы: 1) Являются ли выигрыши по двум различным облигациям зависимыми событиями? 2) Имеет ли место в данной задаче последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха одна и та же? Чему равно число испытаний n? Что является успехом в каждом из этих испытаний? Чему равна вероятность успеха p? 3) По какой формуле вычисляется вероятность того, что в n независимых испытаниях произойдет ровно m успехов?

Задача 65. Техническая система состоит из пяти узлов. Вероятность нарушения режима работы в течение времени t для каждого узла равна 0,2. Система выходит из строя, если нарушения режима работы произойдут не менее чем в трех узлах. Найдите вероятность выхода из строя этой системы за время t, если нарушение режима работы для каждого узла не зависит от состояния работы в других узлах.

Ответьте на вопросы: 1) Какие три события должны иметь место для того, чтобы система вышла из строя? 2) Совместны ли эти события? 3) Чему равны вероятности этих событий?

Задача 66. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найдите вероятность того, что из 6 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене будет продано не менее двух пакетов.

Указание. Перейдите к противоположному событию, представьте его в виде суммы двух несовместных событий. Какова вероятность того, что данный пакет акций будет продан по первоначально заявленной цене?

Задача 67. Доля плодов, пораженных болезнью, составляет 25%. Случайным образом выбирается 6 плодов. Определите вероятность того, что в выборке по крайней мере один плод окажется пораженным болезнью.

Указание. Перейдите к противоположному событию.

Задача 68. По бомбардировщику производится четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в бомбардировщик при одном выстреле равна 0,1. Чтобы вывести бомбардировщик из строя, достаточно трех попаданий. При одном попадании вероятность вывода бомбардировщика из строя равна 0,6, при двух попаданиях — 0,8. Найдите вероятность того, что бомбардировщик будет выведен из строя.

Ответьте на вопросы: 1) Какие гипотезы можно ввести относительно количества попаданий при четырех независимых выстрелах? 2) Чему равны вероятности этих гипотез? (Проверьте, что сумма вероятностей гипотез равна 1.) 3) Чему равны условные вероятности события $A = \{$бомбардировщик выведен из строя$\}$ при этих гипотезах?

Задача 69. Из большой партии зерна (пшеницы с рожью), в которой доля ржи 0,2, берут для пробы 900 случайных зерен. Какова вероятность, что число зерен ржи в пробе от 180 до 210?

Ответьте на вопросы: 1) Является ли выбор 900 случайных зерен последовательностью независимых испытаний? 2) Имеет ли место в данной задаче схема Бернулли? Чему равно число испытаний n? 3) Какие формулы используются для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли при больших n? 4) Чему равна вероятность успеха (появления зерна ржи)? Какие формулы используются, если вероятность успеха p не очень мала? 5) В каких случаях используется локальная, а в каких — интегральная формула Муавра – Лапласа?

Задача 70. В партии из 10 000 изделий имеется 100 дефектных. Найдите вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

Ответьте на вопросы: 1) Чему равна вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется дефектным? 2) Имеет ли место схема Бернулли? Чему равно число испытаний n? 3) Какие формулы используются для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли при больших n и малых p?

Задача 71. Вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,9996. Найдите вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытания не менее 2 изделий.

Ответьте на вопросы: 1) В чем заключается событие, противоположное событию $\{$не менее 2 изделий не выдержат испытания$\}$? 2) Как представить это событие в виде суммы несовместных событий?

Задача 72. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найдите вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) не менее

480 предприятий.

Ответьте на вопросы: 1) Чему равна вероятность того, что малое предприятие данного региона имеет нарушения финансовой дисциплины? 2) Имеет ли место схема Бернулли? Чему равно число испытаний n? 3) Какие формулы используются для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли при больших n, если p не очень мало?

Задача 73. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью 0,01 может иметь дефект. При каком объеме случайной выборки вероятность того, что в выборке будет хотя бы одно дефектное изделие, превышает 0,95?

Ответьте на вопросы: 1) Какое событие противоположно тому событию, что в случайной выборке будет хотя бы одно дефектное изделие, и чему равна вероятность противоположного события? 2) Чему равна вероятность того, что в n независимых испытаниях не появится событие A, если известно, что в отдельном испытании событие A появляется с вероятностью p?

Задача 74. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,05. Сколько деталей в партии, если известно, что наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней равно 55?

Ответьте на вопрос: Каким неравенством связано наивероятнейшее число появлений некоторого события A с вероятностью p появления этого события в отдельном опыте?

Задача 75. Всхожесть семян земляники составляет 80%. Посеяно 50 семян. Чему равно наивероятнейшее число взошедших семян? Какова вероятность такого числа взошедших семян?

Ответьте на вопросы: 1) Чему равно наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли? 2) Какие формулы используются для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли при больших n, если p не очень мало?

1.5. Контрольные задания

Задание 1

1.1. Устройство содержит 5 элементов, из которых 2 изношены. а) Включили один из элементов. Какова вероятность того, что он неизношенный? б) Включили 2 элемента. Какова вероятность того, что они оба неизношенные?

1.2. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в 1-е отделение равна 0,75, во 2-е — 0,9, в 3-е — 0,8. Найдите вероятность того, что: а) только одно отделение получит газеты с опозданием; б) не менее двух отделений получат газеты с опозданием.

1.3. Две фирмы поставляют в магазин ученические тетради. Поставки первой фирмы составляют 40%, а второй — 60% от общего количества. Вероятность брака среди продукции первого поставщика равна 0,01, второго — 0,02. Найдите вероятность того, что взятая наугад тетрадь не содержит брака.

1.4. Пакеты акций, имеющиеся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,6 (для каждого пакета). С какой вероятностью можно ожидать доход хотя бы по одному пакету акций, приобретая 4 пакета различных фирм?

1.5. Среди семян ржи $0,04\%$ сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить ровно 5 семян сорняков?

Задание 2

2.1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

2.2. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок, — 0,9, второй — 0,8, третий — 0,85. Найдите вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

2.3. В одной урне 4 белых и 2 черных шара, во второй — 6 белых и 4 черных шара. Из наугад выбранной урны достают два шара. Какова вероятность того, что они оба: а) белые; б) одного цвета?

2.4. Производят залп из 6 орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект для каждого орудия равна 0,6. Найдите вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

2.5. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит более 3 бракованных книг.

Задание 3

3.1. В ящике содержится 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

3.2. Спортивные общества A и B состязаются тремя командами. Проводятся три матча: 1-я команда общества A играет против 1-й B, 2-я команда A — против 2-й B, 3-я A — против 3-й B. Вероятности выигрыша матчей команд общества A у соответствующих команд B можно принять равными: 0,8 для 1-го матча, для 2-го и 3-го — 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьих не бывает). Чья победа вероятнее?

3.3. Произведено три выстрела в цель. Вероятность попадания при каждом 0,8. Для поражения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании цель поражается с вероятностью 0,5. Какова вероятность поражения цели?

3.4. Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди пяти изделий не более одного нестандартного?

3.5. Контрольную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 60% студентов. Найдите вероятность того, что из 150 студентов работу успешно выполнят с первого раза от 80 до 120 студентов.

Задание 4

4.1. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найдите вероятность того, что они: а) разных цветов; б) одного цвета.

4.2. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

4.3. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении $5 : 8 : 7$. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй — 85%, третьей — 75%. Какова вероятность того, что наугад взятое изделие окажется стандартным?

4.4. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 2 партии из 4 или 3 из 6? (Ничьи в расчет не принимаются.)

4.5. В банк отправлено 1000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,002. Найдите вероятность того, что при проверке будет обнаружено ровно 3 ошибочно укомплектованных пакета.

Задание 5

5.1. Из колоды в 52 карты вынули три карты. Какова вероятность того, что это тройка, семерка, туз?

5.2. Производительности трех станков, обрабатывающих детали, относятся как $1 : 3 : 6$. Из нерассортированной партии обработанных деталей взяты наудачу две. Какова вероятность того, что они обе обработаны на одном станке?

5.3. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найдите вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

5.4. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,3. Найдите вероятность того, что при проверке 10 кустов земляники будет обнаружено не более двух пораженных вирусом.

5.5. а) Какова вероятность того, что при 6 подбрасываниях кубика шестерка выпадет ровно один раз? б) Какова вероятность того, что при 60 подбрасываниях кубика шестерка выпадет ровно 10 раз?

Задание 6

6.1. В конверте среди 100 фотокарточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найдите вероятность того, что среди них окажется нужная карточка.

6.2. Студент знает ответы на 50 вопросов по высшей математике из 60. Какова вероятность сдачи экзамена, если для этого достаточно ответить на два вопроса из трех, содержащихся в билете?

6.3. В одном холодильнике хранится 7 пирожков с мясом и 3 с повидлом, в другом — 9 с мясом и 6 с повидлом. Из каждого холодильника мальчик взял по пирожку — для себя и для товарища. Какова вероятность того, что товарищу достался пирожок с мясом?

6.4. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 10 деталей ровно 4 окажутся бракованными.

6.5. Известно, что в среднем 70% изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется не менее 130 аппаратов 1-го сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

Ответы к контрольным заданиям

Задание 1. **1.1.** а) 0,6; б) 0,3. **1.2.** а) 0,375; б) 0,085. **1.3.** 0,984. **1.4.** $0,9744$. **1.5.** $0,036$.

Задание 2. **2.1.** $\frac{1}{720}$. **2.2.** $0,388$. **2.3.** а) $\frac{11}{30}$; б) $\frac{7}{15}$. **2.4.** $0,544$. **2.5.** $0,019$.

Задание 3. **3.1.** а) $0,6$; б) $\frac{1}{3}$. **3.2.** Вероятнее победа общества A.

3.3. $0,944$. **3.4.** 0,9774. **3.5.** 0,9525.
Задание 4. **4.1.** а) $0,184$; б) $0,137$. **4.2.** $0,154$. **4.3.** $0,8275$. **4.4.** Более вероятно выиграть 2 партии из 4. **4.5.** $0,18$.
Задание 5. **5.1.** $0,003$. **5.2.** $0,46$. **5.3.** $0,4$. **5.4.** $0,383$. **5.5.** а) $0,402$; б) $0,138$.
Задание 6. **6.1.** 0,1. **6.2.** $0,931$. **6.3.** $0,65$. **6.4.** $0,088$. **6.5.** $0,9382$.

Консультации первого уровня

1.1. Примените классическое определение вероятности; в п. б) используйте схему задачи 8.

1.2. См. задачу 31. Выразите события $A = \{$только одно отделение получит газеты с опозданием$\}$ и $B = \{$не менее двух отделений получат газеты с опозданием$\}$ через события $A_i = \{i$-е отделение получит газеты вовремя$\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Следует представить события A и B в виде суммы несовместных событий, а каждое слагаемое — в виде произведения независимых множителей. Найдите вероятности событий A и B, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

1.3. Найдите вероятность противоположного события по формуле полной вероятности (6).

1.4. Имеем схему Бернулли с $n = 4$; $p = 0,6$. Для того чтобы найти вероятность $P_4(m \geqslant 1)$, следует перейти к противоположному событию.

1.5. Имеем схему Бернулли в случае, когда $n = 5000$ — велико, а $p = 0,0004$ — очень мало. Для нахождения $P_{5000}(5)$ примените формулу Пуассона (9).

2.1. Примените классическое определение вероятности. Число равновозможных элементарных исходов можно подсчитать как число способов выбрать 3 различные цифры из 10 имеющихся и разместить их по 3 местам. Найдите число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. (Сколько вариантов набора номера могут дать желаемый результат?).

2.2. Обозначая через A то событие, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего, определите, что будет выражать противоположное событие $\overline{A}$. Как выразить событие $\overline{A}$ через события, вероятности которых даны по условию? Какому условию удовлетворяют вероятности противоположных событий?

2.3. Выдвините гипотезы о выборе урны. Чему равны вероятности гипотез? Вычислите вероятности событий по формуле полной вероятности. Какова вероятность достать два белых шара из 1-й урны? Из 2-й? Какова вероятность, что оба одного цвета?

2.4. Используйте схему Бернулли с $n = 6$ испытаниями, $p = 0,6$. Требуется найти $P_6(m \geqslant 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$.

2.5. Перейдите к противоположному событию и представьте его в виде суммы несовместных событий. Поскольку $n = 10\,000$, $p = 0,0001$, для вычисления вероятностей воспользуйтесь формулой Пуассона (9).

3.1. Найдите общее число возможных элементарных исходов испытания как число способов выбрать 6 деталей из 10. Найдите число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию.

3.2. В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий $C_i = \{$ровно i матчей выиграло общество $A\}$ $(i = 0,$ $1,\ 2,\ 3)$. Представьте вероятности выигрыша чемпионата обществами A и B через эти события. Представьте каждое из полученных событий в виде суммы несовместных.

3.3. Используйте формулу полной вероятности. Для нахождения вероятностей гипотез используйте формулу Бернулли с $n = 3$ (3 выстрела). Какова вероятность поражения цели при условии двух или трех попаданий?

3.4. Имеем схему Бернулли с $n = 5$, $p = 0,95$. Требуется найти $P_5(m \geqslant 4) = P_5(4) + P_5(5)$.

3.5. Имеем схему Бернулли с $n = 150$, $p = 0,6$. Требуется найти $P_{150}(80 \leqslant m < 120)$. Примените интегральную формулу Муавра – Лапласа (11).

4.1. а) $\dfrac{10 \cdot 3 \cdot 7}{C_{20}^3} \approx 0,184$; б) $\dfrac{C_{10}^3 + C_3^3 + C_7^3}{C_{20}^3} \approx 0,137$. Примените классическое определение вероятности. Сколько равновозможных элементарных исходов при выборе 3 карандашей из 20? Сколькими способами можно вынуть красный карандаш? Синий? Желтый? Три разноцветных карандаша? Все три красных?

4.2. $0,1 + 0,2 \cdot 0,3 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,154$. Пусть событие K_i $(i = 1, 2, 3)$ означает выход из строя соответствующего элемента. Эти события независимы, но совместны. Требуется найти $P(K_1 + K_2K_3)$. Используйте теорему сложения вероятностей совместных событий.

4.3. $0,9 \cdot \dfrac{5}{20} + 0,85 \cdot \dfrac{8}{20} + 0,75 \cdot \dfrac{7}{20} = 0,8275$. Используйте формулу полной вероятности. Найдите вероятности гипотез, если они относятся как $5 : 8 : 7$ и их сумма равна 1. Чему равны условные вероятности?

4.4. Примените формулу Бернулли для $n = 4$, $m = 2$ и для $n = 6$,

$m = 3$. Найдите вероятность p выигрыша в одной партии из условия равносильности противников. Какое из полученных значений больше?

4.5. $P_{1000}(3) = \dfrac{2^3 \cdot \mathrm{e}^{-2}}{3!} \approx 0,18$. Используйте формулу Пуассона для $n = 1000$, $m = 3$, $p = 0,002$.

5.1. $\dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^3} \approx 0,003$. Примените классическое определение вероятности. Сколько имеется равновозможных элементарных исходов испытания, состоящего в выборе 3 карт из колоды в 52 карты? Сколькими способами можно вынуть тройку? Семерку? Туз? Все три карты?

5.2. $0,1^2 + 0,3^2 + 0,6^2 = 0,46$. Какова вероятность достать деталь, обработанную на первом станке? Две детали? Каковы вероятности для второго и третьего станка? Представьте искомое событие в виде суммы трех несовместных событий A_i, где $A_i = \{$две выбранные детали обработаны на i-м станке$\}$ ($i = 1, 2, 3$).

5.3. Задача решается в два этапа: нужно найти по формуле полной вероятности вероятность извлечь белый шар из второй урны, черный шар из второй урны, а потом искомую вероятность.

5.4. $P_{10}(m \leqslant 2) = 0,7^{10} + 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 + 45 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 \approx 0,383$. Примените формулу Бернулли для $n = 10$, $p = 0,3$.

5.5. а) $P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \approx 0,402$. Чему равна вероятность p выпадения шестерки при одном броске? Примените формулу Бернулли для $n = 6$, $m = 1$. б) Найдите $P_{60}(10)$, применив локальную формулу Муавра – Лапласа (10) для $n = 60$, $p = \dfrac{1}{6}$, $m = 10$.

6.1. Используя схему задачи 8, получаем: $P(A) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = 0,1$.

6.2. I способ. $\dfrac{50}{60} \cdot \dfrac{49}{59} \cdot \dfrac{48}{58} + \dfrac{50}{60} \cdot \dfrac{49}{59} \cdot \dfrac{10}{58} + \dfrac{50}{60} \cdot \dfrac{10}{59} \cdot \dfrac{49}{58} + \dfrac{10}{60} \cdot \dfrac{50}{59} \cdot \dfrac{49}{58} \approx$ $\approx 0,93$. Рассмотрите события $A_i = \{$студент ответил на i-й вопрос$\}$, $i = 1, 2, 3$. Представьте событие $A = \{$студент сдал экзамен$\}$ в виде суммы несовместных событий, а каждое из слагаемых — в виде произведения событий A_i или $\overline{A}_i$. Учтите, что события A_1, A_2, A_3 не являются независимыми, т. к. вероятность ответа на второй вопрос зависит от того, какой вопрос был первым (ответил студент на него или нет): $P(A_2|A_1) = \dfrac{49}{59}$; $P(A_2|\overline{A}_1) = \dfrac{50}{59}$.

II способ. $\dfrac{C_{50}^3 \cdot C_{10}^0}{C_{60}^3} + \dfrac{C_{50}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{60}^3} \approx 0,93$. В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий B_i = {ровно на i вопросов билета ответил студент} ($i = 0, 1, 2, 3$), поэтому $A = B_3 + B_2$. Вероятности событий B_2 и B_3 можно найти, воспользовавшись схемой задачи 8.

6.3. $\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{15}\right)\cdot 0+\left(\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{15}+\frac{3}{10}\cdot\frac{9}{15}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{15}\right)\cdot 1=0,65.$ Используйте формулу полной вероятности. Какие возможны гипотезы об извлеченных из холодильников пирожках? Найдите вероятности гипотез по теореме умножения вероятностей независимых событий.

6.4. $P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^6 \approx 0,088$. Примените формулу Бернулли для $n = 10$, $p = 0,2$, $m = 4$.

6.5. Примените интегральную формулу Муавра – Лапласа (11). По условию задачи $n = 200$; $p = 0,7$; $m_1 = 130$; $m_2 = 200$.

Консультации второго уровня
Задание 1

1.1. а) Пусть событие A = {включен неизношенный элемент}. Найдем его вероятность, применив классическое определение вероятности. Т. к. можно включить любой из 5 элементов, число равновозможных элементарных исходов $n = 5$. Неизношенных элементов $5 - 2 = 3$, поэтому число благоприятствующих событию A исходов $m = 3$. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{5} = 0,6$.

б) Пусть теперь A = {включены 2 неизношенных элемента}. Используем классическое определение вероятности. Имеет место схема:

Имеем:	2 изношенных	+	3 неизношенных	=	5 элементов
Включили:	0 изношенных	+	2 неизношенных	=	2 элемента
$P(A) =$	C_2^0	$\cdot$	C_3^2	/	C_5^2

Число элементарных исходов — это число способов включить (выбрать) 2 элемента из имеющихся 5, т. е. $n = C_5^2$. Число благоприятных исходов — это число способов выбрать 2 элемента следующим образом: выбрать 2 неизношенных из имеющихся 3 и выбрать 0 изношенных; число благоприятных исходов равно $m = C_3^2 \cdot C_2^0$. Отсюда

$$P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 1}{10} = 0,3.$$

1.2. Известны вероятности событий A_i: $P(A_1) = 0,75$, $P(A_2) = 0,9$, $P(A_1) = 0,8$.

В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий B_i = {ровно i отделений получат газеты с опозданием}

$(i = 0,\,1,\,2,\,3)$. Представим события A и B через эти события.

а) Событие A произойдет в том случае, если только одно отделение получит газеты с опозданием (осуществится событие B_1), т. е. $A = B_1$. Выразим это событие через $A_1,\ A_2,\ A_3$. Осуществление события B_1 означает, что одно отделение получит газеты с опозданием, а два других вовремя. Представим B_1 в виде суммы несовместных событий: либо только первое отделение получит газеты с опозданием (произойдет $\overline{A}_1A_2A_3$), либо только второе отделение получит газеты с опозданием (произойдет $A_1\overline{A}_2A_3$), либо только третье отделение получит газеты с опозданием (произойдет $A_1A_2\overline{A}_3$), т. е.

$$A = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3.$$

Поскольку события-слагаемые несовместны, а события $A_1,\,A_2,\,A_3$ независимы и $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0,1$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0,2$, то

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,1 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,9 \cdot 0,2 = 0,375.$$

б) Событие B произойдет в том случае, если получат газеты с опозданием ровно два отделения (осуществится событие B_2) или все три отделения (осуществится событие B_3), т. е. $B = B_2 + B_3$. Выразим эти события через $A_1,\ A_2,\ A_3$. Осуществление события B_3 равносильно осуществлению всех трех событий $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$, т. е. $B_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Событие B_2 означает, что два отделения получат газеты с опозданием, а одно вовремя. Представим B_2 в виде суммы несовместных событий: либо только первое отделение получит газеты вовремя (произойдет $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо только второе отделение получит газеты вовремя (произойдет $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$), либо только третье отделение получит газеты вовремя (произойдет $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$). Итак,

$$B = B_2 + B_3 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Поскольку эти четыре события несовместны, а события $A_1,\ A_2,\ A_3$ независимы, то

$$P(B) = 0,75{\cdot}0,1{\cdot}0,2 + 0,25{\cdot}0,9{\cdot}0,2 + 0,25{\cdot}0,1{\cdot}0,8 + 0,25{\cdot}0,1{\cdot}0,2 = 0,085.$$

1.3. Пусть событие A = {наугад взятая тетрадь бракованная}. Известны вероятности события A при условии, что тетрадь поставлена в магазин 1-й, 2-й фирмой. Для вычисления безусловной вероятности события A используем формулу полной вероятности (6).

Введем гипотезы: H_i = {выбранная тетрадь поставлена i-й фирмой} $(i = 1,\,2)$. Из условий задачи легко находятся следующие вероятности для случайно выбранной в магазине тетради:

$$P(H_1) = 0,4; \qquad P(A|H_1) = 0,01;$$
$$P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6; \qquad P(A|H_2) = 0,02.$$

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) = 1$.

По формуле полной вероятности находим

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,02 = 0,016$.

Тогда вероятность того, что наугад взятая тетрадь небракованная, равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,984$.

1.4. Пусть событие $B = \{$доход хотя бы по одному пакету акций$\}$. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, т. е. события $\overline{B} = \{$ни один пакет не принесет доход$\}$. В данном примере имеем схему Бернулли с $n = 4$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$. Применяя формулу Бернулли (8), получаем

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_4(0) = 1 - 0,4^4 = 1 - 0,0256 = 0,9744.$$

1.5. Пусть событие $A = \{$выбранное семя — семя сорняка$\}$. Мы имеем схему Бернулли в случае, когда число независимых испытаний $n = 5000$ — велико, а $p = P(A) = 0,0004$ — очень мало. Для нахождения искомой вероятности $P_{5000}(5)$ применяем формулу Пуассона (9), где $a = np = 5000 \cdot 0,0004 = 2$. Таким образом,

$$P_{5000}(5) \approx \frac{2^5 \cdot \mathrm{e}^{-2}}{5!} = \frac{32 \cdot \mathrm{e}^{-2}}{120} \approx \frac{32 \cdot 0,1353}{120} \approx 0,036.$$

Задание 2

2.1. Обозначим событие $A = \{$набраны нужные цифры$\}$. Определим число элементарных исходов. Первая цифра (из последних трех цифр телефонного номера), независимо от остальных, может быть выбрана 10 способами. На каждый из 10 способов выбора первой цифры приходится 9 способов выбора второй (т. к. цифры различны, то можно взять любую цифру, кроме той, которую выбрали первый раз); каждый из $10 \cdot 9 = 90$ способов выбора первых двух цифр сочетается с 8 способами выбора третьей цифры. Всего получаем $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способов. (Это также можно подсчитать как число способов выбрать 3 различные цифры из 10 имеющихся и разместить их по 3 местам, т. е. как число размещений из 10 по 3: $n = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.) Все эти исходы равновозможны.

Число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, равно 1, т. к. абонент пытается дозвониться до одного конкретного номера. Таким образом, используя классическое определение вероятности, получаем $P(A) = \dfrac{1}{720}$.

2.2. Пусть событие A_i означает, что в течение часа i-й станок потребует внимания рабочего ($i = 1, 2, 3$). Тогда событие $A = A_1 + A_2 + A_3$

состоит в том, что среди трех станков хотя бы один за время работы окажется неисправным (т. е. потребует внимания рабочего). Вследствие совместности событий, для определения вероятности события A лучше перейти к противоположному событию $\overline{A}$ = {все станки в течение часа будут работать исправно (не потребуют внимания)}. Событие $\overline{A}$ является произведением трех событий: $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, здесь уже событие $\overline{A}_i$ (i= 1, 2, 3) означает, что i-й станок во время работы не потребует внимания. Вероятности событий $\overline{A}_i$ даны в условии задачи. Поэтому, учитывая независимость событий, по теореме умножения вероятностей получим

$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,612.$

Тогда вероятность наступления события A равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,612 = 0,388.$$

2.3. Обозначим события A = {оба шара белые}, B = {оба шара одного цвета}. Возможны следующие предположения (гипотезы) о выборе урны: H_1 = {выбрали первую урну}, H_2 = {выбрали вторую урну}. Эти гипотезы образуют полную группу событий. Поскольку всего имеется 2 гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице, то вероятность каждой из гипотез равна $\frac{1}{2}$, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

а) Мы можем найти вероятность события A, если известно, какая урна выбрана, т. е. можем определить условные вероятности A при условии гипотез H_1, H_2. Зная условные вероятности, можно вычислить вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Определим условную вероятность $P(A|H_1)$, используя классическое определение вероятности. Из первой урны достали два шара. Какова вероятность, что они оба белые? Число элементарных исходов равно $n = C_6^2$ (число способов выбрать 2 шара из имеющихся в первой урне 6 шаров), число благоприятных исходов $m = C_4^2$ (число способов выбрать 2 шара из 4 белых). В силу классического определения вероятности получаем $P(A|H_1) = \dfrac{C_4^2}{C_6^2} = \dfrac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$. При выполнении гипотезы H_2 число элементарных исходов равно $n = C_{10}^2$ (из 10 имеющихся во второй урне шаров достаем два шара), $m = C_6^2$ (из 6 белых шаров выбираем два шара), $P(A|H_2) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{30}$.

б) Поскольку в урнах только белые и черные шары, то событие $B = \{$оба шара одного цвета$\}$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий $A = \{$оба шара белые$\}$ и $C = \{$оба шара черные$\}$. Вероятность первого события найдена в п. а). Аналогично по формуле полной вероятности определяется вероятность события C. Найдем условные вероятности события C, если известно, какая урна выбрана, по классическому определению вероятности. При выполнении гипотезы H_1 число элементарных исходов равно $n = C_6^2$ (из всех имеющихся в первой урне шаров достаем два шара), $m = C_2^2$ (из 2 черных шаров выбираем два шара), $P(C|H_1) = \dfrac{C_2^2}{C_6^2} = \dfrac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$. При выполнении гипотезы H_2 число элементарных исходов равно $n = C_{10}^2$ (из всех имеющихся во второй урне шаров достаем два шара), $m = C_4^2$ (из 4 черных шаров во второй урне достаем два шара), $P(C|H_2) = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \dfrac{12}{90} = \dfrac{2}{15}$. Следовательно, $P(C) = P(H_1)P(C|H_1) + P(H_2)P(C|H_2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{15} = \dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(B) = P(A) + P(C) = \frac{11}{30} + \frac{1}{10} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

2.4. Мы имеем схему Бернулли с $n = 6$ испытаниями (залп из 6 орудий). Событие $A = \{$попадание в объект при одном выстреле$\}$. По условию задачи $p = P(A) = 0,6$, тогда $q = 1 - p = 0,4$. Искомое событие B состоит в том, что из 6 орудий попадут не менее 4, т. е. или четыре, или пять, или шесть. Таким образом, $P(B) = P_6(m \geqslant 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$. Эти вероятности находим по формуле Бернулли (8):

$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^2 = 15 \cdot 0,1296 \cdot 0,16 = 0,31104$;
$P_6(5) = C_6^5 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^1 = 6 \cdot 0,07776 \cdot 0,4 = 0,186624$;
$P_6(6) = C_6^6 \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^0 = 1 \cdot 0,046656 \cdot 1 = 0,046656$;
$P(B) = P_6(m \geqslant 4) = 0,31104 + 0,186624 + 0,046656 = 0,54432$.

2.5. Имеет место схема Бернулли в случае, когда $n = 10\,000$ (количество книг), $p = 0,0001$ (вероятность того, что книга бракованная). Поскольку события, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, для вычисления вероятностей $P_{10\,000}(m)$ воспользуемся формулой Пуассона (9) с $a = np = 10\,000 \cdot 0,0001 = 1$.

Требуется найти вероятность события $\{m > 3\}$. Противоположное событие $\{m \leqslant 3\}$ означает, что бракованных книг либо ровно 3, либо 2, либо 1, либо 0, поэтому

$$P_{10\,000}(m > 3) = 1 - P_{10\,000}(m \leqslant 3) = 1 - (P_{10\,000}(0) + P_{10\,000}(1) + $$
$$+P_{10\,000}(2)+P_{10\,000}(3)) \approx 1 - \left(\frac{1^0 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{2!} + \frac{1^3 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{3!}\right) =$$
$$= 1 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{8}{3} \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0,019.$$

Задание 3

3.1. а) Общее число элементарных исходов испытания равно числу способов извлечь (выбрать) 6 деталей из 10, т. е. равно C_{10}^6.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести деталей должна быть деталь № 1 и, следовательно, остальные 5 деталей имеют другие номера. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 деталей из оставшихся девяти, т. е. равно C_9^5.

Искомую вероятность находим по классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{C_9^4}{C_{10}^4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0,6,$$

т. к. по свойствам числа сочетаний

$$C_9^5 = C_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}; \quad C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}.$$

б) Для второго случая множество элементарных исходов такое же, $n = C_{10}^6$. Число исходов, благоприятствующих событию $B = \{$среди отобранных деталей есть детали № 1 и № 2 и, следовательно, 4 детали имеют другие номера$\}$, равно числу способов, которыми можно выбрать 4 детали из оставшихся восьми деталей, т. е. равно C_8^4. Следовательно,

$$P(B) = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{C_8^4}{C_{10}^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}.$$

3.2. Обозначим события $A = \{$чемпионат выиграло общество $A\}$, $B = \{$чемпионат выиграло общество $B\}$. Известны вероятности событий $A_i = \{i$-й матч выиграла команда общества $A\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,4$, $P(A_3) = 0,4$.

В результате испытания произойдет одно из четырех несовместных событий $C_i = \{$ровно i матчей выиграло общество $A\}$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$. Представим события A и B через эти события.

Событие A произойдет в том случае, если команды этого общества выиграют ровно два матча (осуществится событие C_2) или все три матча (осуществится событие C_3), т. е. $A = C_2 + C_3$. Выразим эти события через A_1, A_2, A_3:

$$A = C_2 + C_3 = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3.$$

Поскольку эти четыре события несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$P(A) = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,544.$

Вероятность выигрыша общества B можно найти аналогично (проделайте это в качестве упражнения), или, поскольку события A и B являются противоположными, то $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,544 = 0,456 < 0,544$, т. е. победа общества A вероятнее.

3.3. Пусть событие $A = \{$цель поражена$\}$. Известны вероятности события A при условии, что произошло 0, 1, 2 или 3 попадания. Поэтому для вычисления безусловной вероятности события A используем формулу полной вероятности (6).

Введем гипотезы: $H_i = \{i$ попаданий в цель при 3 выстрелах$\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Найдем вероятности гипотез. Мы имеем схему Бернулли с $n = 3$ выстрелами (испытаниями), $p = 0,8$ (вероятность попадания при одном выстреле), $q = 1 - p = 0,2$. Искомые вероятности $P(H_i) = P_3(i)$ находим по формуле (8):

$P(H_0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0,008 = 0,008;$
$P(H_1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,096;$
$P(H_2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^1 = 3 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,384;$
$P(H_3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^0 = 1 \cdot 0,512 \cdot 1 = 0,512.$

Определим теперь условные вероятности поражения цели в зависимости от количества попаданий. Если попаданий нет, то цель не может быть поражена, т. е. $P(A|H_0) = 0$. При одном попадании цель поражается с вероятностью 0,5, поэтому $P(A|H_1) = 0,5$. Поскольку по условию для поражения цели достаточно двух попаданий, это означает, что $P(A|H_2) = 1$; $P(A|H_3) = 1$. По формуле (6) находим

$$P(A) = 0,008 \cdot 0 + 0,096 \cdot 0,5 + 0,384 \cdot 1 + 0,512 \cdot 1 = 0,944.$$

3.4. Имеем схему Бернулли с $n = 5$ (число изделий), $p = 0,95$ (вероятность изготовления стандартного изделия), $q = 1 - 0,95 = 0,05$. Требуется найти вероятность того, что нестандартных изделий не более одного, а следовательно, стандартных — не менее четырех, т. е. $P_5(m \geqslant 4)$. Искомое событие $\{m \geqslant 4\}$ означает, что стандартных изделий или 4, или 5, поэтому

$$P_5(m \geqslant 9) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot 0,95^4 \cdot 0,05^1 + C_5^5 \cdot 0,95^5 \cdot 0,05^0 =$$

$= 5 \cdot 0,95^4 \cdot 0,05 + 0,95^5 = 0,95^4(5 \cdot 0,05 + 0,95) = 1,2 \cdot 0,95^4 \approx 0,9774.$

3.5. Имеем схему Бернулли с $n = 150$ (число студентов), $p = 0,6$ (вероятность того, что студент выполнит работу успешно с первого раза). Поскольку n велико, p не мало, используем интегральную формулу Муавра – Лапласа (11). Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{80 - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \approx -1,67; \quad x_2 = \frac{120 - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 5.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (приложение 2) определяем $\Phi(-1,67) = -\Phi(1,67) \approx -0,4525$; $\Phi(5) \approx 0,5$. По формуле (11) искомая вероятность $P_{150}(80 \leqslant m < 120) \approx \Phi(5) - \Phi(-1,67) \approx \approx 0,5 - (-0,4525) = 0,9525.$

ГЛАВА 2
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятие случайной величины

Под случайной величиной (СВ) понимают величину, которая в результате опыта принимает некоторое числовое значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Пример 22. а) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Прирост веса домашнего животного за месяц есть СВ, которая может принять значение из некоторого промежутка.

в) Число мальчиков среди пяти новорожденных есть СВ, значениями которой могут быть 0, 1, 2, 3, 4, 5.

г) Число бракованных изделий в данной партии — СВ, принимающая целые значения от 0 до n, где n — объем партии.

д) Расстояние между эпицентром взрыва бомбы и целью, на которую она сброшена, есть СВ, которая может принять любое неотрицательное значение.

Случайные величины будем обозначать греческими буквами ξ, η, ξ_1, ξ_2 и т. д.

Дадим строгое определение.

Случайной величиной ξ называется числовая (действительнозначная) функция $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, определенная на множестве Ω элементарных событий и обладающая тем свойством, что для любого конечного или счетного объединения $\mathcal{B}$ интервалов на числовой оси существует вероятность события $\{\xi \in \mathcal{B}\}$, т. е. существует вероятность $P(\xi \in \mathcal{B})$ того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее множеству $\mathcal{B}$.

Отсюда вытекает, что для каждой СВ ξ (связанной с данным случайным экспериментом, т. е. с данным множеством элементарных событий) при всех действительных x определена вероятность $P(\xi \in (-\infty; x)) = P(\xi < x)$.

Таким образом, на множестве действительных чисел определена функция $F(x) = P(\xi < x)$, выражающая вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x. Эта функция называется ***функцией распределения* СВ** ξ. Ее можно задать для любой СВ.

Геометрически равенство $F(x) = P(\xi < x)$ можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что СВ ξ примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, лежащей левее точки x, т. е. случайная точка с абсциссой ξ попадет в интервал $(-\infty; x)$ (рис. 12).

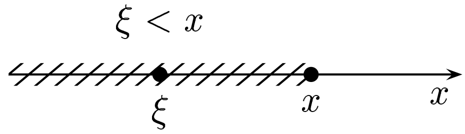


Рис. 12

Свойства функции распределения.

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. Это свойство следует из того, что $F(x)$ есть вероятность.
2. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
4. Вероятность попадания СВ ξ в полуинтервал $[\alpha; \beta)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах полуинтервала:
$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$
5. $P(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$.
6. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x - 0) = F(x)$.

Мы будем различать два типа СВ: дискретные и непрерывные.

СВ называется ***дискретной***, если множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$ ее возможных значений конечно или счетно (т. е. если все ее значения можно перечислить).

СВ называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна на всей числовой оси. Непрерывная СВ принимает все значения из некоторого интервала или системы интервалов на числовой оси.

СВ из примера 22 а, в, г дискретные, 22 б, д — непрерывные. Существуют примеры СВ, которые не являются ни дискретными, ни непрерывными.

Законом распределения СВ называется любое правило, позволяющее определить ее функцию распределения. О СВ говорят, что она ***распределена*** по данному закону или ***подчинена*** этому закону.

Закон распределения полностью задает СВ. Однако часто встречаются случаи, когда достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства распределения СВ. Такие числа называют числовыми характеристиками СВ. Важнейшими из них являются математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Математическое ожидание характеризует центр распределения СВ; это есть в некотором смысле среднее значение СВ. Дисперсия характеризует разброс значений СВ относительно ее математического ожидания.

2.2. Дискретные случайные величины

Для того чтобы задать дискретную СВ ξ, достаточно перечислить все ее возможные значения и указать, с какими вероятностями она их принимает. Тогда закон распределения удобно задать в виде таблицы, в которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ СВ ξ и соответствующие им вероятности $p_m = P(\xi = x_m)$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_m	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_m	$\ldots$

Эта таблица называется ***рядом распределения дискретной* СВ**. Читается таблица следующим образом: СВ ξ принимает значение x_m с вероятностью p_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$. Числа p_m должны удовлетворять следующим условиям:

$$p_m \geqslant 0, \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m + \ldots = 1, \tag{14}$$

поскольку в результате испытания величина ξ всегда примет одно из значений $x_1,\ x_2,\ \ldots$, а p_m — вероятности несовместных событий $\{\xi = x_m\}$, образующих полную группу.

При решении задач на составление ряда распределения дискретной СВ нужно ответить на следующие вопросы:

— Каковы возможные значения этой СВ?

— В чем заключается событие $\{\xi = x_0\}$?

— Как определить вероятности таких событий?

Пример 23. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 у. е., 10 выигрышей по 100 у. е. и 100 выигрышей по 1 у. е. при общем числе билетов 10 000. Найдем закон распределения случайного выигрыша ξ для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения СВ ξ есть $x_1 = 0$ у. е., $x_2 = 1$ у. е., $x_3 = 100$ у. е., $x_4 = 1000$ у. е.. СВ ξ принимает значение 1 с вероятностью $p_2 = P(\xi = x_2) = \dfrac{100}{10\,000} = 0,01$ (т. к. выигрыш $x_2 = 1$ у. е. приходится на 100 билетов из 10 000 лотерейных билетов). Аналогично по классическому определению вероятности находим $p_3 = P(\xi = x_3) = \dfrac{100}{10\,000} = 0,001$, $p_4 = P(\xi = x_4) = \dfrac{1}{10\,000} = 0,0001$. Используя свойство нормировки (14), вычисляем $p_1 = 1 - 0,01 - 0,001 - 0,0001 = 0,9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	100	1000
P	$0,9889$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$

Типичный график функции распределения дискретной СВ показан на рис. 13.

График имеет ступенчатый вид. Если дискретная СВ принимает значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m, \ldots$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m, \ldots$, то функция распределения этой СВ терпит разрывы в точках x_m со скачками величины $p_m = P(\xi = x_m)$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$.

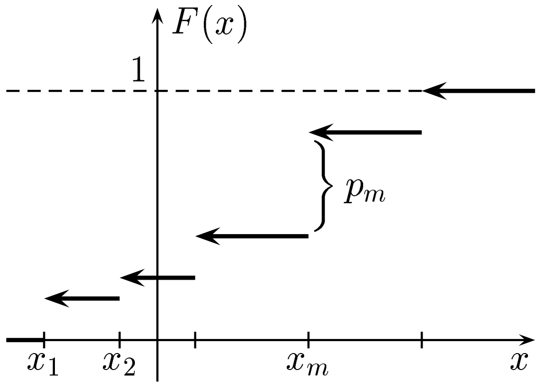


Рис. 13

Математическим ожиданием дискретной **СВ** ξ называется число, равное сумме произведений ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_mp_m + \ldots, \tag{15}$$

где x_m $(m = 1, 2, \ldots)$ — возможные значения СВ, а p_m $(m = 1, 2, \ldots)$ — соответствующие им вероятности.

Дисперсией $D\xi$ **СВ** ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т. е.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Для вычисления дисперсии в большинстве случаев удобнее использовать формулу

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2, \tag{16}$$

т. е. дисперсия СВ равна разности между математическим ожиданием квадрата этой СВ и квадратом ее математического ожидания. Для дискретной СВ

$$M(\xi^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_m^2p_m + \ldots .$$

Средним квадратичным отклонением σ_ξ **СВ** ξ называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

При решении задач на вычисление числовых характеристик СВ следует иметь в виду, что для любой СВ $D\xi \geqslant 0$, $\sigma_\xi \geqslant 0$, а $M\xi$ всегда заключается между наименьшим и наибольшим значениями случайной величины ξ.

Приведем некоторые законы распределения дискретных СВ.

1. СВ ξ имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами n и p, если она принимает значения $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ с вероятностями

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события A (число успехов) при n независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам

$$M\xi = np, \qquad D\xi = npq. \tag{17}$$

2. Дискретная СВ ξ имеет ***распределение Пуассона*** с параметром a, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ с вероятностями

$$P(\xi = m) = \frac{a^m \cdot \mathrm{e}^{-a}}{m!}, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots .$$

Закон распределения Пуассона является хорошим приближением для биномиального распределения при больших значениях n и малых p (или $1-p$). Поэтому закон распределения Пуассона называют законом редких явлений. Примерами СВ, имеющих распределение Пуассона, могут служить: число родившихся за определенный период (день, неделю) близнецов; число регистрируемых на АТС вызовов за определенный промежуток времени; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $a = np$.

Математическое ожидание и дисперсия СВ, распределенной по закону Пуассона, равны между собой и равны параметру a, т. е. $M\xi = D\xi = a$.

Эту особенность распределения Пуассона используют на практике, когда точным распределением СВ является биномиальное распределение и значение n заведомо велико. Тогда на основании опытных данных находят оценки для математического ожидания и дисперсии; если они значительно различаются между собой, то нет оснований считать распределение СВ пуассоновским.

Примеры решения задач

Задача 76. Найдите математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, среднее квадратичное отклонение σ_ξ и вероятности $P(\xi = 30)$, $P(\xi = 35)$, $P(\xi < M\xi + 3)$ по заданному закону распределения СВ ξ :

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Решение. Найдем $M\xi$ по формуле (15):

$$M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 20 \cdot 0,1 + 30 \cdot 0,6 + 40 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,2 = \\ = 2 + 18 + 4 + 10 = 34.$$

Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения СВ ξ^2. Эта СВ принимает значение $20^2 = 400$ в том случае, когда

ξ принимает значение 20, т. е. с вероятностью 0,1; СВ ξ^2 принимает значение $30^2 = 900$, если ξ принимает значение 30, т. е. с вероятностью 0,6, и т. д. Итак, ряд распределения СВ ξ^2 имеет вид

ξ^2	400	900	1600	2500
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 = 400 \cdot 0,1 + 900 \cdot 0,6 + 1600 \cdot 0,1 + \\ +2500 \cdot 0,2 = 40 + 540 + 160 + 500 = 1240.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле (16):

$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 1240 - 34^2 = 1240 - 1156 = 84.$

Среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{84} \approx 9,2$.

По таблице (ряду распределения) определяем, что СВ ξ принимает значение 30 с вероятностью 0,6, т. е. $P(\xi = 30) = 0,6$. Поскольку среди возможных значений СВ ξ нет значения 35, то $P(\xi = 35) = 0$.

Чтобы найти вероятность $P(\xi < M\xi + 3)$, посмотрим, какие значения СВ попадают в интервал $(-\infty; M\xi + 3)$, т. е. в интервал $(-\infty; 37)$. Это значения 20 и 30. Поэтому

$P(\xi < M\xi + 3) = P(\xi < 37) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = 0,1 + 0,6 = 0,7.$

Задача 77. Построить ряд и функцию распределения СВ ξ — числа выпадений герба при трех независимых подбрасываниях правильной монеты. Найдите $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ и вероятность $P(1 < \xi \leqslant 4)$.

Решение. СВ ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3. Поскольку имеется $n = 3$ независимых испытания (подбрасывания) и вероятность p выпадения герба при каждом подбрасывании одна и та же ($p = 0,5$), то СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$ и $p = 0,5$. Поэтому вероятности $p_m = P(\xi = m)$ вычисляются по формуле Бернулли (8):

$P(\xi = 0) = C_3^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^3 = 0,125$; $P(\xi = 1) = C_3^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 0,375$;
$P(\xi = 2) = C_3^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^1 = 0,375$; $P(\xi = 3) = C_3^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,125$.

В результате получим следующий ряд распределения:

ξ	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Найдем значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_m СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_m < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

при $x \leqslant 0$ имеем $F(x) = 0$, т. к. ни одно из значений 0, 1, 2, 3 не

удовлетворяет указанному неравенству;
при $0 < x \leqslant 1$ получим $F(x) = P(\xi = 0) = 0,125$ (условию $x_m < x$ удовлетворяет только значение $x_m = 0$);
при $1 < x \leqslant 2$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,125 + 0,375 = 0,5$ (значения 0 и 1 удовлетворяют неравенству $x_m < x$);
при $2 < x \leqslant 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0,125 + 0,375 + 0,375 = 0,875$;
при $x > 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,125 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,875 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 14.

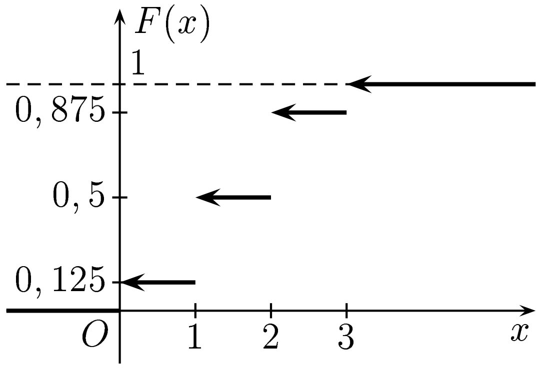


Рис. 14

Вычислим числовые характеристики СВ ξ:
$M\xi = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 = 1,5$;
$M(\xi^2) = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,375 + 9 \cdot 0,125 = 3$;

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75.$$

Поскольку СВ ξ имеет биномиальное распределение, эти же результаты можно получить по формулам (17):
$M\xi = np = 3 \cdot 0,5 = 1,5$; $D\xi = npq = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$.
Среднее квадратичное отклонение будет равно $\sigma_\xi = \sqrt{0,75} \approx 0,87$.

Чтобы найти $P(1 < \xi \leqslant 4)$, выберем те значения СВ, которые удовлетворяют указанному неравенству, т. е. попадают в промежуток $(1; 4]$:
$P(1 < \xi \leqslant 4) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0,375 + 0,125 = 0,5$.

Задача 78. Производятся последовательные испытания десяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Постройте ряд распределения числа проведенных испытаний, если вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна p.

Решение. Наименьшее значение СВ ξ — числа испытаний — равно 1, т. к. по крайней мере один прибор обязательно будет проверен. СВ может принимать целые значения от 1 до 10 включительно.

СВ ξ принимает значение 1, если первый прибор не выдержал испытания, т. е. $P(\xi = 1) = q = 1 - p$. СВ ξ принимает значение 2, если первый прибор прошел, а второй не прошел испытание, поэтому по теореме умножения вероятностей независимых событий получаем $P(\xi = 2) = pq$. Аналогично СВ ξ принимает значение 3, если первый и второй приборы выдержали испытание, а третий — не выдержал, поэтому $P(\xi = 3) = p \cdot p \cdot q = p^2 q$.

Вообще испытания заканчиваются на m-м приборе (m=1, 2, ..., 9), если первые $m - 1$ приборов пройдут испытания, а m-й прибор не выдержит испытания. По теореме умножения вероятностей независимых событий получаем

$$P(\xi = m) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m-1 \text{ множитель}} \cdot q = p^{m-1} q \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9).$$

Десятый прибор испытывается на надежность только в том случае, когда первые девять приборов выдержали испытания. Это значит, что

$$P(\xi = 10) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{9 \text{ множителей}} = p^9.$$

Таким образом, ряд распределения СВ ξ имеет вид

ξ	1	2	3	...	m	...	10
P	q	pq	p^2q	...	$p^{m-1}q$	...	p^9

Задача 79. Дан перечень возможных значений дискретной СВ ξ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; известны $M\xi = 0,1$, $D\xi = 0,89$. Постройте ряд распределения СВ ξ.

Решение. Обозначим вероятности значений $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ через p_1, p_2, p_3 соответственно.

Учитывая то, что сумма вероятностей всех возможных значений ξ равна единице, а также используя формулы (15) и (16) для вычисления числовых характеристик СВ, составим систему уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ M\xi = (-1) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0,1, \\ D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = (-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 \cdot p_3 - 0,1^2 = 0,89; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ -p_1 + p_3 = 0,1, \\ p_1 + p_3 = 0,9; \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0,4, \\ p_2 = 0,1, \\ p_3 = 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, ряд распределения имеет вид

ξ	-1	0	1
P	$0,4$	$0,1$	$0,5$

Задача 80. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найдите вероятность того, что за 5 минут поступит не менее двух вызовов.

Решение. Рассмотрим СВ ξ_t — число вызовов, поступивших за t минут. Известно среднее число вызовов, поступающих за одну минуту, т. е. математическое ожидание $M\xi_1 = 2$. Требуется найти $P(\xi_5 \geqslant 2)$.

СВ ξ_t может принимать целые значения 0, 1, 2, 3, … (число вызовов), причем верхнюю границу указать невозможно. Вызовы появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью. Каждый из очень большого числа возможных вызовов имеет такую же вероятность, как остальные. Учитывая это, можно считать, что ξ_t распределена по закону Пуассона; обозначим параметр распределения a_t.

Для распределения Пуассона $M\xi_t = a_t$. Обозначим $a = M\xi_1 = 2$. Учитывая то, что среднее число вызовов за время t прямо пропорционально времени, получим, что $a_t = at$ и среднее число вызовов за 5 минут равно $a_5 = 2 \cdot 5 = 10$, т. е. СВ ξ_5 имеет распределение Пуассона с параметром $a_5 = 10$.

Для того чтобы вычислить искомую вероятность, перейдем к противоположному событию:

$$P(\xi_5 \geqslant 2) = 1 - P(\xi_5 < 2) = 1 - (P(\xi_5 = 0) + P(\xi_5 = 1)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{10^0 \cdot \mathrm{e}^{-10}}{0!} + \frac{10^1 \cdot \mathrm{e}^{-10}}{1!}\right) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-10} + 10 \cdot \mathrm{e}^{-10}\right) \approx 0,9995.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 81. Найдите $P(\xi = 3)$, $P(\xi = 7)$, $P(\xi < M\xi)$ и σ_ξ, если дан ряд распределения СВ ξ

ξ	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность события $\{\xi = 3\}$? 2) Является ли значение 7 возможным значением СВ ξ? 3) По какой формуле вычисляется математическое ожидание дискретной СВ? 4) Какие значения СВ ξ меньше числа $M\xi$? 5) Как вычисляется дисперсия дискретной СВ? 6) Как найти среднее квадратичное отклонение σ_ξ, если известна дисперсия СВ ξ?

Задача 82. Определите значение p и найдите функцию распределения, если задан ряд распределения СВ ξ

ξ	-3	1	2
P	0,3	0,2	p

Ответьте на вопросы: 1) Чему равна сумма вероятностей всех возможных значений дискретной СВ? 2) Вероятность какого события нужно вычислить для нахождения значения функции распределения в точке x? 3) Чему равны наименьшее и наибольшее значения функции распределения СВ ξ? 4) В каких точках функция распределения дискретной СВ терпит разрыв? 5) Чему равна величина скачка функции распределения в точке разрыва?

Задача 83. Найдите ряд распределения и числовые характеристики СВ ξ, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,7 & \text{при } 1 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Ответьте на вопросы: 1) В каких точках функция распределения дискретной СВ терпит разрыв? 2) Какие значения может принимать СВ ξ? 3) Чему равна величина скачка функции распределения в точке разрыва? 4) По каким формулам вычисляются числовые характеристики дискретной СВ?

Задача 84. СВ ξ принимает одно из двух неизвестных значений x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известно, что $P(\xi = x_1) = 0,8$; $M\xi = 3,2$; $D\xi = 0,16$. Составьте ряд распределения и найдите функцию распределения этой СВ.

Указания. Используйте свойство (14) для определения $P(\xi = x_2)$. Выразите $M\xi$ и $M(\xi^2)$ через значения x_1 и x_2. Чему равно значение $M(\xi^2)$, если величины $M\xi$ и $D\xi$ известны?

Задача 85. В партии деталей 10% нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составьте ряд распределения числа ξ нестандартных деталей среди двух отобранных. Найдите числовые характеристики этой СВ и вероятности $P(\xi = M\xi)$, $P(\xi < M\xi)$.

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь нестандартна? 2) Какие возможные значения принимает СВ ξ? Может ли она принять значение 0? 3) Какое распределение имеет эта СВ? Чему равны параметры этого распределения? 4) По каким формулам можно вычислить вероятности возможных значений и числовые характеристики этой СВ?

Задача 86. В группе из 9 изделий 4 бракованных. Наудачу вынимают 2 изделия. Составьте ряд распределения числа ξ бракованных среди них. Найдите $P(\xi \leqslant 1)$.

Указания. Какие возможные значения принимает СВ ξ? Определите вероятности возможных значений, используя схему задачи 8. Как вычисляется число способов выбрать 2 изделия из девяти? Чему равно число способов выбрать

2 небракованных изделия? 1 бракованное и 1 качественное? 2 бракованных? Какие значения СВ ξ удовлетворяют указанному неравенству?

Задача 87. В коробке 10 карандашей, из них 3 простых. Наудачу взяты 2 карандаша. Найдите математическое ожидание дискретной СВ ξ — числа простых карандашей среди двух выбранных. Найдите $P(\xi = 1)$, $P(\xi = 4)$, $P(1 \leqslant \xi \leqslant 4)$. Постройте график функции распределения.

Указания. Составьте ряд распределения. Какие возможные значения принимает СВ ξ? Для вычисления вероятностей определите, какие значения СВ удовлетворяют указанным условиям.

Задача 88. В урне 6 шаров, из них 4 красных. Наудачу вынуты 3 шара. Составьте закон распределения дискретной СВ ξ — числа красных шаров среди вынутых. Найдите вероятность того, что вынуто не менее двух красных шаров.

Указания. Какие возможные значения принимает СВ ξ? Может ли СВ ξ принять значение 0? Определите вероятности возможных значений, используя схему задачи 8. Вероятность какого неравенства нужно определить? Какие возможные значения СВ ξ удовлетворяют этому неравенству?

Задача 89. В урне 6 шаров, из них 4 красных и 2 черных. Шары извлекают до появления красного. Составьте закон распределения дискретной СВ ξ — числа вынутых черных шаров. Найдите $P(\xi \geqslant 2)$.

Указания. Какие возможные значения принимает СВ ξ? Что означают события $\{\xi = 0\}$, $\{\xi = 1\}$, $\{\xi = 2\}$? Сколько шаров и в каком порядке вынуто в каждом случае? Определите вероятности возможных значений по теореме умножения вероятностей зависимых событий.

Задача 90. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составьте ряд распределения и постройте график функции распределения числа ξ вызовов, если производится не более 4 попыток. Найдите $P(\xi \geqslant M\xi)$, $P(\xi = M\xi)$, $P(\xi = 0,4)$.

Указания. Какие возможные значения принимает СВ ξ? Может ли СВ ξ принять значение 0? В каком случае СВ ξ принимает значение 4? Определите вероятности возможных значений по теореме умножения вероятностей независимых событий.

Задача 91. Студент должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена он оценивает как 0,9, второго — 0,8, третьего — 0,6. Найдите математическое ожидание числа успешно сданных экзаменов.

Указания. Составьте ряд распределения СВ ξ — числа успешно сданных экзаменов. Какие возможные значения принимает эта СВ? Может ли она принять значение 0? Используйте теоремы сложения и умножения вероятностей для вычисления вероятностей возможных значений, представив события $\{\xi = m\}$ в виде суммы несовместных слагаемых, а каждое из слагаемых — в виде произведения независимых событий. Найдите $M\xi$.

Задача 92. Постройте ряд и функцию распределения СВ ξ — числа попаданий мячом в корзину при четырех независимых бросках, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,4. Найдите $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ и вероятность $P(2 < \xi \leqslant 4)$.

Ответьте на вопросы: 1) Какие значения может принимать СВ ξ? 2) Какое распределение она имеет? Каковы параметры этого распределения? 3) По какой формуле рассчитываются вероятности возможных значений этого распределения? 4) По каким формулам вычисляются числовые характеристики этого распределения? 6) Какие значения ξ удовлетворяют неравенству, вероятность которого нужно найти?

Задача 93. Клиенты банка, не связанные друг с другом, возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,8. Найдите числовые характеристики СВ ξ — числа не возвращенных в срок кредитов из 10 выданных.

Ответьте на вопросы: 1) Какие значения может принимать СВ ξ? 2) Какое распределение она имеет? Каковы параметры этого распределения? 3) По каким формулам можно вычислить числовые характеристики СВ, имеющей биномиальное распределение?

Задача 94. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 10 тыс. рублей. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ ξ — количества выигрышей при пяти сделанных покупках. Каков средний размер выигрыша? Определите вероятность выигрыша более 30 тыс. рублей.

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность выигрыша при одной покупке? 2) Являются ли выигрыши при нескольких покупках зависимыми? 3) Какие значения может принимать СВ ξ? 4) Какое распределение она имеет? Каковы параметры этого распределения? 5) Какие значения принимает размер выигрыша в зависимости от количества выигрышей? 6) Как вычислить математическое ожидание размера выигрыша, зная $M\xi$? 7) Какие значения принимает ξ в случае выигрыша более 30 тыс. рублей? По какой формуле вычисляются вероятности возможных значений СВ ξ?

Задача 95. Найдите математическое ожидание дискретной СВ ξ — числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых ровно на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Ответьте на вопросы: 1) Какова вероятность того, что при бросании одной кости выпадет одно очко? другое количество очков? 2) По какой формуле вычисляется вероятность p того, что при бросании пяти игральных костей ровно на двух костях появится по одному очку? 3) Какие значения может принимать СВ ξ? 4) Какое распределение она имеет? Каковы параметры этого распределения?

Задача 96. В радиоаппаратуре за 10 000 ч непрерывной работы происходит замена в среднем десяти ламп. Найдите вероятность выхода из строя радиоаппаратуры из-за выхода из строя ламп за 100 ч непрерывной работы.

Ответьте на вопросы: 1) Какое распределение имеет СВ ξ_t — число ламп, вышедших из строя за t часов? 2) Как зависит параметр этого распределения от t? 3) Чему равны математические ожидания СВ $\xi_{10\,000}$ и ξ_{100}? 4) Вероятность какого неравенства нужно определить?

Задача 97. Средняя плотность болезнетворных микробов в 1 м^3 почвы равна 200. Какова вероятность того, что в случайно отобранной пробе 1 дм^3 почвы будет обнаружено не менее 3 микробов?

Ответьте на вопросы: 1) Какое распределение имеет СВ ξ_t — число болезнетворных микробов в t дм^3 почвы? 2) Как зависит среднее число микробов от объема t? 3) Вероятность какого неравенства нужно определить? 4) В чем заключается противоположное событие?

Задача 98. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,1, а в девятку — 0,2. Стрелок произвел два выстрела. Найдите среднее число набранных очков, если очки начисляются только при попадании в девятку или десятку (соответственно начисляется 9 и 10 очков).

Указания. Составьте ряд распределения СВ ξ — числа набранных очков. Какие возможные значения принимает эта СВ? Определите вероятности этих значений, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Найдите $M\xi$.

Задача 99. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составьте закон распределения дискретной СВ ξ — числа патронов, выданных стрелку. Найдите наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

Ответьте на вопросы: Какие возможные значения принимает случайная СВ ξ? Может ли она принять значение 0? В чем заключается событие $\{\xi = m\}$? Какое значение имеет наибольшую вероятность?

Задача 100. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, а вторым – 0,7. Первым начинает стрельбу первое орудие. Найдите первые три члена рядов распределения дискретных случайных СВ ξ и η — числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудиями.

Указания. Какая из этих СВ может принимать значение 0? Какие значения принимают СВ ξ и η, если попадание произойдет при 1-м, 2-м, 3-м и т. д. выстреле? В чем заключаются события $\{\xi = m\}$, $\{\eta = m\}$? Для вычисления вероятностей представьте каждое из этих событий в виде суммы несовместных слагаемых, а слагаемые — в виде произведения независимых событий.

Задача 101. Докажите, что математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p появления события A. Докажите, что математическое ожидание числа появлений события A в n испытаниях равно np.

Указание. Дискретная СВ — число появлений события в одном испытании имеет только два возможных значения: 1 (событие A наступило) и 0 (событие A не наступило).

Задача 102. Докажите, что математическое ожидание отклонения СВ от ее математического ожидания равно нулю.

2.3. Непрерывные случайные величины

Для непрерывной СВ, в отличие от дискретной, понятие ряда распределения не существует. Такую СВ обычно задают с помощью функции распределения или плотности распределения.

Функция распределения представляет собой универсальный способ задания СВ в том смысле, что она существует для любой СВ. Ряд распределения существует только для дискретной СВ, а плотность распределения — только для непрерывной.

Для непрерывной СВ функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ непрерывна в любой точке числовой прямой. Более того, $P(\xi = x_0) = 0$, т. е. вероятность того, что непрерывная СВ примет заранее указанное значение, равна нулю. (Заметим, однако, что это событие не обязательно невозможно.) Отсюда следует, что для непрерывной СВ

$$P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = P(\alpha < \xi < \beta) =$$

$$= P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{18}$$

Функцию $p(x)$ будем называть ***плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ*** ξ, если вероятность того, что ξ принимает значение из промежутка $(-\infty; x)$ равна интегралу от этой функции в пределах от $-\infty$ до x, т. е.

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx.$$

Следовательно, если функция $p(x)$ непрерывна в точке x, то функция распределения $F(x)$ дифференцируема в этой точке, причем

$$p(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения.

1. $p(x) \geqslant 0$ при всех x, т. к. $F(x)$ — неубывающая функция.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Геометрически свойства 1 и 2 означают, что график плотности

распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна 1.
3. Вероятности попадания непрерывной СВ ξ в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы и равны определенному интегралу от плотности вероятности на этом промежутке:

$$P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = P(\alpha < \xi < \beta) = \\ = P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)dx. \qquad (19)$$

Из этого равенства следует, что геометрически вероятность $P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Математическое ожидание $M\xi$ и ***дисперсия*** $D\xi$ ***непрерывной*** **СВ** ξ определяются по формулам

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx, \quad D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx. \qquad (20)$$

На практике для вычисления дисперсии, как правило, удобно использовать формулу (16), при этом

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx.$$

Приведем некоторые законы распределения непрерывных СВ.

1. Непрерывная СВ ξ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a; b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a; b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b]. \end{cases} \qquad (21)$$

Примерами равномерно распределенных СВ могут служить: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до ближайшего целого (она распределена равномерно на отрезке $[-0,5; 0,5]$); угол, который образует случайно брошенный на стол карандаш с краем стола (СВ распределена равномерно на отрезке $[0; \pi]$)

Равномерно распределенная на $[a; b]$ СВ характеризуется тем свойством, что вероятность ее попадания в некоторый интервал, лежащий внутри отрезка $[a;b]$, зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}, \text{ если } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Функция распределения СВ, распределенной равномерно на $[a;b]$, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } x \in [a;b], \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения изображены на рис. 15.

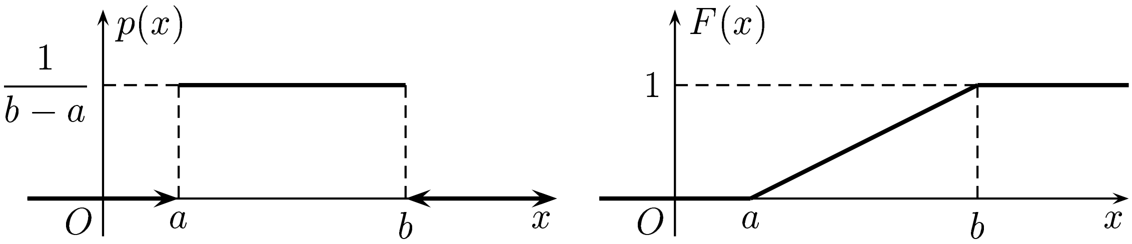


Рис. 15

Числовые характеристики равномерного распределения равны

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2. Непрерывная СВ ξ имеет ***показательное (экспоненциальное) распределение*** с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функция показательного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Графики плотности распределения и функции распределения изображены на рис. 16.

Числовые характеристики показательного распределения равны

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

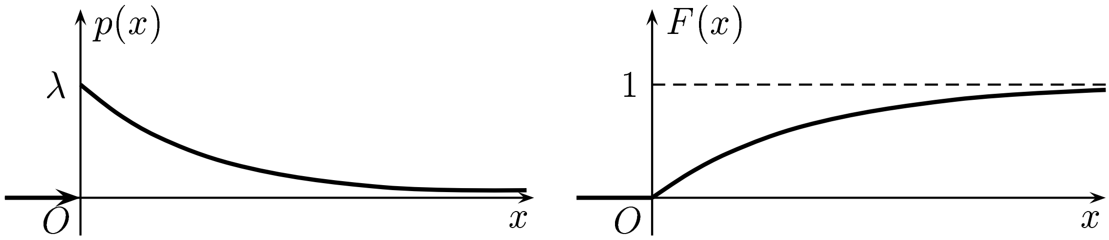


Рис. 16

Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на АТС, продолжительность безотказной работы приборов и т. д.

Показательный закон обладает свойством «отсутствия последействия». Если СВ ξ — время работы прибора до первого отказа — имеет показательное распределение с параметром λ, то вероятность безотказной работы прибора в течение интервала времени длительности t не зависит от времени предшествующей работы прибора до начала интервала, а только от длительности t этого интервала.

3. Наиболее часто встречается на практике закон распределения, который называется нормальным, или законом Гаусса. Главная его особенность заключается в том, что он является предельным законом, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения.

Ввиду важности нормального закона распределения, рассмотрим его особо в следующем разделе.

Примеры решения задач

Задача 103. Дана плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 0,2, & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ 0,5 - 0,1x, & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(-1 < \xi \leqslant 2)$, $P(\xi < 1,5)$, $P(\xi = 1,5)$. Постройте графики плотности распределения и функции распределения.

Решение. Найдем математическое ожидание $M\xi$ по формуле (20). Учитывая, что плотность распределения $p(x)$ задана различными аналитическими выражениями на различных промежутках (см. рис. 17),

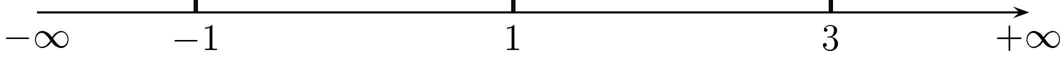


Рис. 17

разобьем интеграл на четыре интеграла:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\cdot dx + \int\limits_{-1}^{1} x\cdot 0,2\cdot dx + \int\limits_{1}^{3} x\cdot(0,5-0,1x)\cdot dx +$$

$$+\int\limits_{3}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx = 0 + 0,1x^2\Big|_{-1}^{1} + \left(0,25x^2 - 0,1\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{3} + 0 = \frac{17}{15} \approx 1,133.$$

Для того чтобы вычислить дисперсию $D\xi$, найдем

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} x^2\cdot 0\cdot dx + \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot 0,2\cdot dx + \int\limits_{1}^{3} x^2\cdot(0,5-0,1x)\cdot dx +$$

$$+\int\limits_{3}^{+\infty} x^2\cdot 0\cdot dx = 0 + 0,2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \left(0,5\cdot\frac{x^3}{3} - 0,1\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{1}^{3} + 0 = \frac{37}{15}.$$

По формуле (16) вычисляем дисперсию

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{37}{15} - \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{266}{225} \approx 1,182.$$

Среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx \sqrt{1,182} \approx 1,09$.

Вычислим вероятности по формуле (19):

$$P(-1 < \xi \leqslant 2) = \int\limits_{-1}^{2} p(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} 0,2dx + \int\limits_{1}^{2} (0,5-0,1x)dx =$$

$$= 0,2x\Big|_{-1}^{1} + \left(0,5x - 0,05x^2\right)\Big|_{1}^{2} = 0,75;$$

$$P(\xi < 1,5) = \int\limits_{-\infty}^{1,5} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} 0,2dx + \int\limits_{1}^{1,5} (0,5-0,1x)dx =$$

$$= 0 + 0,2x\Big|_{-1}^{1} + \left(0,5x - 0,05x^2\right)\Big|_{1}^{1,5} = 0,5875.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 1,5) = 0$.

Найдем функцию распределения по формуле $F(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$. Для этого рассмотрим четыре случая: 1) $x \leqslant -1$; 2) $-1 < x \leqslant 1$; 3) $1 < x \leqslant 3$; 4) $x > 3$.

При $x \leqslant -1$ получим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

при $-1 < x \leqslant 1$ разбиваем интеграл на два (см. рис. 18):

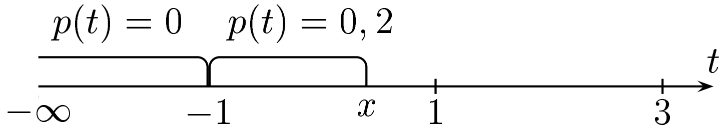


Рис. 18

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dt+\int\limits_{-1}^{x}0,2dt=0+\,0,2t|_{-1}^{x}=0,2x+0,2;$$

при $-1<x\leqslant 3$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dt+\int\limits_{-1}^{1}0,2dt+\int\limits_{1}^{x}(0,5-$ $-0,1t)dt=0+\,0,2t|_{-1}^{1}+(0,5t-0,05t^2)\big|_{1}^{x}=0,5x-0,05x^2-0,05;$

при $x>3$ получим $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dt+\int\limits_{-1}^{1}0,2dt++\int\limits_{1}^{3}(0,5-$ $-0,1t)dt+\int\limits_{3}^{x}0dt=0+\,0,2t|_{-1}^{1}+(0,5t-0,05t^2)\big|_{1}^{3}+0=1.$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant -1,\\ 0,2x+0,2, & \text{если } -1<x\leqslant 1,\\ 0,5x-0,05x^2-0,05, & \text{если } 1<x\leqslant 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Заметим, что вероятности можно было также найти по формуле (18), воспользовавшись видом функции распределения:
$P(-1<\xi\leqslant 2)=F(2)-F(-1)=(0,5\cdot 2-0,05\cdot 2^2-0,05)-0=0,75.$
При этом учтено, что $2\in(1;3]$ и $F(x)=0,5x-0,05x^2-0,05$ при $x\in(1;3]$; поскольку $F(x)=0$ при $x\in(-\infty;-1]$, то $F(-1)=0$. По определению функции распределения, поскольку $1,5\in(1;3]$,

$P(\xi<1,5)=F(1,5)=0,5\cdot 1,5-0,05\cdot 1,5^2-0,05=0,5875.$

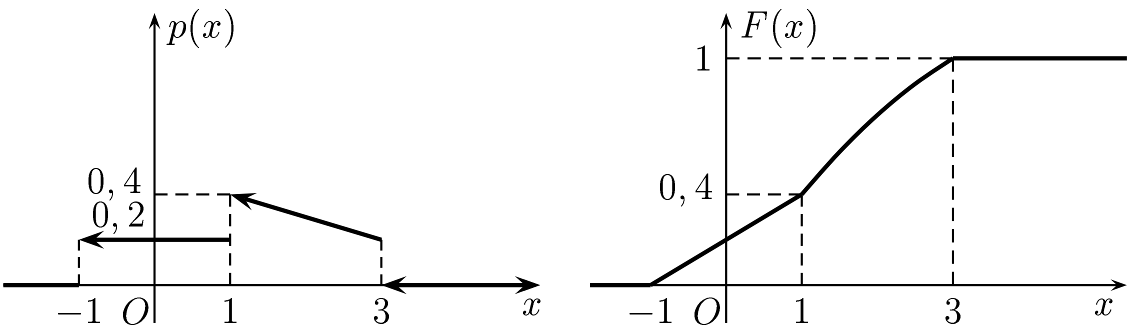


Рис. 19

Построим графики плотности распределения и функции распределения (см. рис. 19).

Задача 104. Дана функция распределения непрерывной СВ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ ax - 2, & \text{если } 1 < x \leqslant 1,5, \\ 1, & \text{если } x > 1,5. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a и числовые характеристики СВ.

Решение. Коэффициент a можно найти двумя способами.

I способ. Из условия непрерывности функции распределения непрерывной СВ следует, что равенство $F(x + 0) = F(x - 0)$ должно выполняться при любых значениях x. Вычислим соответствующие значения в точках, где меняется аналитическое задание функции, т. е. при $x = 1$ и $x = 1,5:$

$$F(1 + 0) = \lim_{x \to 1+0} F(x) = \lim_{x \to 1+0} (ax - 2) = a - 2;$$
$$F(1 - 0) = \lim_{x \to 1-0} F(x) = \lim_{x \to 1-0} 0 = 0;$$
$$F(1,5 + 0) = \lim_{x \to 1,5+0} F(x) = \lim_{x \to 1,5+0} 1 = 1;$$
$$F(3 - 0) = \lim_{x \to 1,5-0} F(x) = \lim_{x \to 1,5-0} (ax - 2) = 1,5a - 2.$$

Таким образом, должны выполняться равенства $a - 2 = 0$ и $1,5a - 2 = 1$. Оба соотношения справедливы при $a = 2$.

II способ. Используем свойство плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Найдем плотность вероятности $p(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ a, & 1 < x \leqslant 1,5, \\ 0, & x > 1,5. \end{cases}$$

Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{1,5} adx + \int\limits_{1,5}^{+\infty} 0dx = 0 + ax\Big|_{1}^{1,5} + 0 = 0,5a, \text{ т. е.}$$

$0,5a = 1$. Следовательно, $a = 2$.

Подставляя найденное a, получим следующие выражения для функции распределения и плотности распределения данной СВ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2x - 2, & \text{если } 1 < x \leqslant 1,5, \\ 1, & \text{если } x > 1,5; \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 1,5, \\ 0, & x > 1,5. \end{cases}$$

Для того чтобы найти числовые характеристики $M\xi$ и $D\xi$, необходимо знать плотность распределения $p(x) = F'(x)$. Вычисляем

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{1,5} x \cdot 2 \cdot dx + \int\limits_{1,5}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + x^2\Big|_1^{1,5} + 0 = 2,25 - 1 = 1,25;$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{1,5} x^2 \cdot 2 \cdot dx + \int\limits_{1,5}^{+\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{2x^3}{3}\Bigg|_1^{1,5} + 0 = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{19}{12};$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{19}{12} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{48}; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

По виду плотности распределения заключаем, что СВ ξ распределена равномерно на отрезке $[1; 1,5]$. В случае равномерно распределенной на $[a; b]$ СВ ξ (и только в этом случае) математическое ожидание и дисперсию можно вычислить по формулам (17):

$$M\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{1+1,5}{2} = 1,25, \qquad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1,5-1)^2}{12} = \frac{1}{48}.$$

Задача 105. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения — 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 2 мин. Каково среднее время ожидания?

Решение. Рассмотрим СВ ξ — время ожидания. Эта СВ может принимать значения от 0 до 5 мин. Поскольку пассажир может появиться в любой момент времени, то все значения ξ от $a = 0$ до $b = 5$ мин равновозможны, т. е. СВ ξ имеет равномерное распределение на промежутке от 0 до 5 мин. В силу (21) плотность ее распределения имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{при } x \in [0; 5], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 5]. \end{cases}$$

Требуется найти вероятность $P(\xi < 2)$. По формуле (19) получаем

$$P(\xi < 2) = \int\limits_{-\infty}^{2} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} 0,2dx = 0 + 0,2x|_0^2 = 0,4.$$

Среднее время ожидания равно $M\xi = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+5}{2} = 2,5$ мин.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 106. Найдите $P(\xi < 1)$, $P(0,25 < \xi \leqslant 0,75)$, $P(\xi > 0,75)$, $P(\xi = 0,25)$, если известна плотность распределения СВ ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 3 - 4x, & \text{если } 0 < x \leqslant 0,5, \\ 0, & \text{если } x > 0,5. \end{cases}$$

Постройте график плотности распределения. Какую геометрическую величину выражает вероятность $P(0,25 < \xi \leqslant 0,75)$?

Ответьте на вопросы: 1) Как выражается вероятность через плотность распределения? 2) Чему равна вероятность того, что непрерывная СВ примет заданное конкретное значение?

Задача 107. Найдите $P(\xi < -1)$, $P(-0,25 < \xi \leqslant 0,5)$, $P(\xi > 0,5)$, $P(\xi = -0,25)$, если известна функция распределения СВ ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -2, \\ 0,5 + 0,25x, & \text{если } -2 < x \leqslant 0, \\ 0,5 + 0,5x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Постройте график функции распределения.

Указания. Какую вероятность выражает $F(x)$? Найдите $F(-1)$. Как выражается вероятность $P(\alpha \leqslant \xi < \beta)$ через функцию распределения? Чему равна вероятность того, что непрерывная СВ примет заданное конкретное значение?

Задача 108. Найдите $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > 0,5M\xi)$, если известна плотность распределения СВ ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -2, \\ 0,25x + 0,75, & \text{если } -2 < x \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Задача 109. Найдите $M\xi$, $D\xi$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$, если известна функция распределения СВ ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1,5x - 0,5x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Ответьте на вопросы: 1) По каким формулам вычисляются числовые характеристики непрерывной СВ? 2) Как найти плотность распределения, если известна функция распределения? 3) Как выражается среднее квадратичное отклонение σ_ξ через дисперсию $D\xi$? 4) Вероятность попадания СВ в какой интервал требуется вычислить?

Задача 110. При каком значении a функция

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -1, \\ a - x, & \text{если } -1 < x \leqslant 0, \\ ax, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

является плотностью распределения некоторой СВ? Найдите функцию распределения этой СВ.

Ответьте на вопросы: 1) Какими свойствами обладает плотность распределения? 2) Как функция распределения выражается через плотность?

Задача 111. При каком значении a функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ a(\mathrm{e}^{2x} - 1), & \text{если } 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

является функцией распределения непрерывной СВ? Найдите $P(\xi < 1)$, $P(0,5 < \xi \leqslant 1)$.

Указание. Определите параметр a из условия непрерывности функции $F(x)$ во всех точках.

Задача 112. СВ ξ распределена равномерно на отрезке $[3; 7]$. Найдите $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(4 < \xi \leqslant 6)$, $P(6 \leqslant \xi \leqslant 10)$, $P(\xi = 7)$.

Указания. По каким формулам вычисляются числовые характеристики равномерно распределенной СВ? При вычислении вероятностей проверьте, принадлежат ли значения 4, 6, 10 отрезку $[3; 7]$. Чему равна вероятность того, что непрерывная СВ примет заданное конкретное значение?

Задача 113. Непрерывная СВ ξ имеет равномерное распределение с $M\xi = 3$, $\sigma_\xi = 2$. Найдите $P(\xi < 1)$, $P(4 < \xi \leqslant 7)$.

Указания. Как выражаются числовые характеристики СВ, распределенной равномерно на $[a; b]$, через a и b? Найдите a и b, запишите плотность распределения СВ ξ. При вычислении вероятностей проверьте, принадлежат ли значения 1, 4, 7 отрезку $[a; b]$.

Задача 114. Рост человека измеряют в сантиметрах, округляя до ближайшего целого значения. Найдите вероятность того, что при определении роста ребенка допущена ошибка более 3 мм.

Ответьте на вопросы: 1) Какие значения может принимать СВ ξ — разность между ростом ребенка и округленным значением роста? Являются ли все эти значения равновозможными? 2) Какое распределение имеет СВ ξ? 3) Вероятность какого неравенства следует определить?

Задача 115. Установлено, что время ремонта телевизоров есть СВ ξ, имеющая показательное распределение. Определите вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта составляет 15 дней.

Ответьте на вопросы: 1) Как связано среднее время ремонта телевизоров с $M\xi$? 2) Как выражается $M\xi$ через параметр показательного распределения λ? 3) Какой вид имеет функция показательного распределения? 4) В какой интервал должна попасть СВ?

Задача 116. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время ξ безотказной работы прибора имеет показательное распределение, найдите: а) выражение его плотности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

Ответьте на вопросы: 1) Какой вид имеют плотность и функция показательного распределения с параметром λ? 2) Как выражается $M\xi$ через λ? Как связано среднее время безотказной работы прибора с $M\xi$? 3) Какому условию будет удовлетворять ξ, если в течение 100 ч прибор не выйдет из строя?

Задача 117. Из материала плотностью 7,8 г/см^3 изготавливаются шарики диаметром 10 мм, при этом шарики, не проходящие через круглое отверстие диаметром 10,1 мм и проходящие через отверстие диаметром 9,9 мм, бракуются. Определите, какой процент шариков имеет массу более 4,2 г, считая распределение радиуса шарика в поле допуска равномерным.

Указания. Какие значения может принимать СВ ξ — радиус шарика? Определите поле допуска для радиуса шарика. Как зависит масса шарика от его радиуса? Какому условию удовлетворяет радиус тех шариков, масса которых более 4,2 г?

Задача 118. Ножки циркуля, каждая длиной 10 см, раздвинуты на случайный угол ξ, значения которого в пределах от 0 до 180° равновероятны. Какова вероятность того, что расстояние между остриями ножек меньше 10 см?

Ответьте на вопросы: 1) Как выражается расстояние между остриями ножек циркуля через угол ξ? 2) Какому условию удовлетворяет угол ξ, если расстояние меньше 10 см?

2.4. Нормальное распределение

Распределение СВ ξ называется ***нормальным*** (или ***распределением Гаусса***) с параметрами a и σ (обозначается $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$), если плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,. \tag{23}$$

Параметры a и σ имеют смысл математического ожидания и среднего квадратичного отклонения СВ ξ: $M\xi = a,\ D\xi = \sigma^2$.

График плотности нормального распределения изображен на рис. 20 и носит

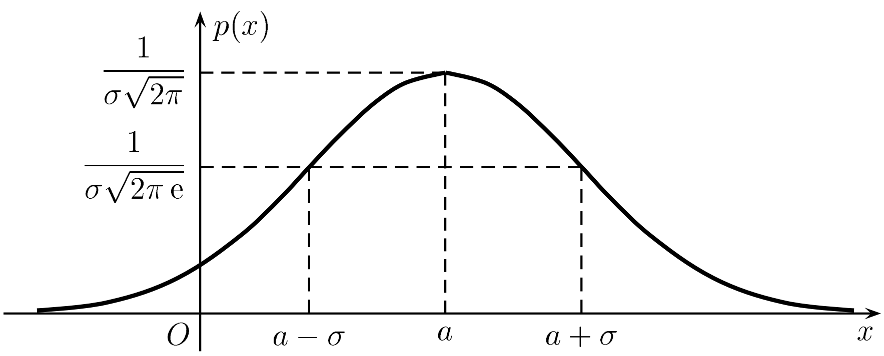


Рис. 20

название кривой Гаусса. Функция плотности нормального распределения имеет максимум при $x = a$, равный $p(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Кривая Гаусса симметрична относительно прямой $x = a$, точки $\left(a - \sigma; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\,\mathrm{e}}}\right)$ и $\left(a + \sigma; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\,\mathrm{e}}}\right)$ являются точками перегиба этой кривой.

Рассмотрим влияние параметров нормального распределения на вид графика плотности. При изменении a и постоянном σ кривая Гаусса, не меняя формы, смещается вдоль оси Ox. С увеличением σ ордината максимума кривой уменьшается, а поскольку площадь под любой кривой плотности распределения должна быть равна единице, то кривая становится более пологой, растягивается вдоль оси Ox. При уменьшении σ кривая Гаусса, напротив, вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (см. рис. 21).

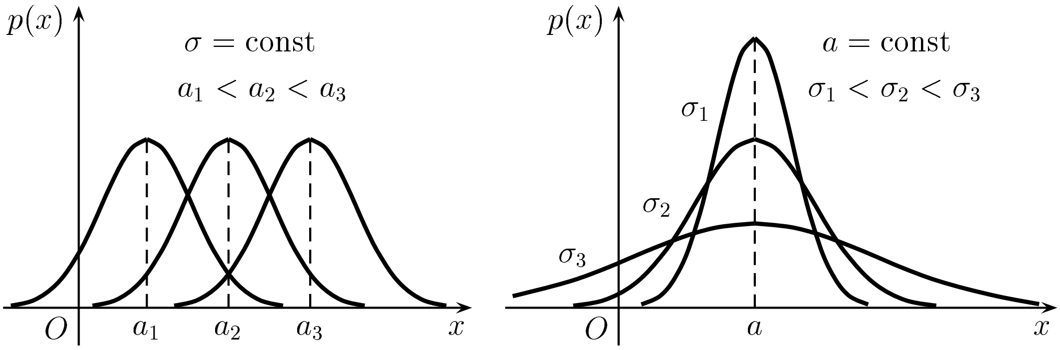


Рис. 21

Для $\xi \in \mathcal{N}(a; \sigma)$ функция распределения выражается через функцию Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

а вероятность попадания в интервал $[\alpha; \beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{24}$$

В силу непрерывности СВ эта формула справедлива как со строгими, так и с нестрогими знаками неравенств.

Вероятность того, что СВ $\xi \in \mathcal{N}(a; \sigma)$ отклонится от своего математического ожидания не более чем на ε, определяется соотношением

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{25}$$

При $\varepsilon = 3\sigma$ получаем $P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973$. Это свойство носит название правила трех сигм.

Правило трех сигм. Если СВ $\xi \in \mathcal{N}(a; \sigma)$, то попадание ее в интервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$ является практически достоверным событием.

Нормальное распределение наиболее часто используется на практике. В частности, ошибки измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин распределены по нормальному закону. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях, что делает нормальное распределение исключительным в ТВ.

Примеры решения задач

Задача 119. СВ ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M\xi = 5$; дисперсия $D\xi = 0,64$. а) Найдите вероятность попадания этой СВ в интервал $(4;7)$. б) Какова вероятность того, что СВ примет значение, большее чем 3? в) Определите вероятность того, что СВ примет значение, равное ее математическому ожиданию.

Решение. а) Так как $a = M\xi = 5$; $\sigma = \sqrt{D\xi} = 0,8$, то по формуле (24) находим

$$P(4 < \xi < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0,8}\right) =$$
$$= \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx 0,4938 - (-0,3944) = 0,8882.$$

б) Используем снова формулу (24):

$$P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty-5}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{3-5}{0,8}\right) =$$
$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-2,5) \approx 0,5 - (-0,4938) = 0,9938.$$

в) Поскольку нормальное распределение является непрерывным распределением, то вероятность того, что СВ ξ примет конкретное значение, равна 0, т. е. $P(\xi = M\xi) = P(\xi = 5) = 0$.

Задача 120. СВ ξ — ошибка измерительного прибора — распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 3 мм. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале от 0 до 2,4 мм.

Решение. Указание на то, что систематическая ошибка прибора отсутствует, означает, что математическое ожидание СВ равно нулю. Следовательно, $\xi \in \mathcal{N}(0;3)$.

Найдем сначала вероятность события $A = \{$в результате одного опыта СВ ξ примет значение из интервала $(0;2,4)\}$. По формуле (24) получаем:

$$P(0 < \xi < 2,4) = \Phi\left(\frac{2,4-0}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{3}\right) = \Phi(0,8) - \Phi(0) \approx 0,2881 - 0 = 0,2881.$$

Для вычисления вероятности события $B = \{$в трех независимых измерениях ошибка ξ хотя бы один раз окажется в интервале $(0;2,4)\}$ перейдем к противоположному событию $\overline{B} = \{$в результате каждого из трех измерений СВ ξ примет значение, не входящее в интервал $(0;2,4)\}$. Пусть $A_i = \{$в результате i-го измерения СВ ξ примет значение из интервала $(0;2,4)\}$, $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Тогда $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Поскольку

$P(A_i) = P(A) = P(0 < \xi < 2,4) \approx 0,2881$; $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) \approx 1 - 0,2881 = 0,7119$, применяя теорему умножения для независимых событий, найдем вероятность события $\overline{B}$: $P(\overline{B}) \approx 0,7119^3 \approx 0,3608$. Тогда $P(B) \approx 1 - 0,3608 = 0,6392$.

Задача 121. Определите среднее квадратичное отклонение ошибки прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки ξ распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ± 20 м.

Решение. Из условия задачи следует, что $P(|\xi| \leqslant 20) = 0,95$.

Так как плотность вероятности случайных ошибок нормальная и $M\xi = 0$ (систематические ошибки отсутствуют), то получим

$$P(-20 < \xi < 20) = \Phi\left(\frac{20 - 0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-20 - 0}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right).$$

Получаем уравнение $2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,95$, откуда по таблице значений функции $\Phi(x)$ (см. приложение 2, по значению $\Phi(x) = 0,475$ определяем значение x) находим $\frac{20}{\sigma} \approx 1,96$. Следовательно, $\sigma \approx 10,2$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 122. СВ ξ подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием 2 и дисперсией 9. Напишите выражение для плотности вероятности и функции распределения этой СВ.

Указания. Воспользуйтесь формулами для плотности и функции нормального распределения. Как выражаются параметры нормального распределения через математическое ожидание и дисперсию СВ?

Задача 123. Плотность вероятности СВ ξ задана выражением: $p(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Определите коэффициент a. Найдите числовые характеристики этой СВ и вероятность того, что в результате опыта СВ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

Указания. Сравните заданную функцию с плотностью нормального распределения (23). Определите параметры нормального распределения по виду показателя степени. Как связаны параметры с числовыми характеристиками нормально распределенной СВ? Вероятность попадания СВ в какой интервал требуется определить?

Задача 124. Найдите вероятность попадания на заданный интервал (15; 25) СВ $\xi \in \mathcal{N}(20; 5)$. Запишите плотность распределения этой СВ и постройте ее график.

Задача 125. СВ ξ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $M\xi = 2$, $\sigma_\xi = 1$. Определите вероятность неравенства $0 < \xi < 3$.

Задача 126. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная СВ с параметрами

$a = 173$ см, $\sigma = 6$ см, найдите доли костюмов 3-го роста (170–176 см) и 4-го роста (176–182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Задача 127. Какой процент конденсаторов из числа отобранных ОТК с разбросом $\pm 20\%$ будет иметь отклонение от номинала в пределах от 0 до 1%? Предполагается, что величина разброса подчиняется нормальному закону распределения и весь диапазон разбросов конденсаторов соответствует 3σ.

Ответьте на вопросы: 1) Чему равны математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение рассматриваемой СВ? 2) Вероятность попадания СВ в какой интервал следует определить?

Задача 128. Производится два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку $+5$ м и среднее квадратичное отклонение 6 м. Какова вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного не более чем на 15 м?

Ответьте на вопросы: 1) Какое распределение имеет СВ ξ — отклонение результата измерения от истинного значения? Какие параметры имеет эта СВ? 2) Какому неравенству удовлетворяет СВ ξ, если результат измерения отклоняется от истинного значения не более чем на 15 м? 3) Как вычисляется вероятность p этого неравенства? 4) Как выражается через p вероятность того, что при каждом из двух независимых измерений отклонение от истинного значения не будет превышать 15 м?

Задача 129. Ошибка измерения дальности радиолокатором подчинена нормальному закону. Систематической ошибки радиолокатор не дает. Сколько измерений необходимо произвести, чтобы с вероятностью 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 5 м при условии, что радиолокатор имеет среднее квадратичное отклонение 15 м?

Ответьте на вопросы: 1) Чему равна вероятность p того, что при одном измерении ошибка не превзойдет по абсолютной величине 5 м? 2) Какое событие противоположно тому событию, что ошибка в результате одного измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м, и чему равна вероятность q такого события? 3) Какое событие противоположно тому событию, что в результате n измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 5 м, и как выражается его вероятность через n и q?

Задача 130. Ошибка измерительного прибора подчинена нормальному закону. Систематической ошибки прибор не имеет. Какое среднее квадратичное отклонение должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,41 ошибка измерения отклонилась от истинного значения не более чем на 27 мм?

Ответьте на вопросы: 1) Чему равно математическое ожидание СВ ξ — ошибки измерительного прибора? 2) Какой формулой связана ошибка измерительного прибора с заданной вероятностью?

Задача 131. Стоимость некой ценной бумаги — нормально распределенная СВ. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% — выше 90 ден. ед. Найдите числовые характеристики этой СВ.

Ответьте на вопросы: 1) Какому неравенству удовлетворяла СВ ξ — стоимость ценной бумаги — в течение 20% рассматриваемого времени? в течение 75% времени? 2) По какой формуле выражаются эти вероятности через параметры a и σ нормального распределения? 3) Как связаны числовые характеристики нормального распределения с параметрами?

2.5. Контрольные задания

Задание 1

1.1. Найдите математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, среднее квадратичное отклонение σ_ξ и вероятности $P(M\xi - 3 < \xi \leqslant 17)$, $P(\xi = 13)$, $P(\xi = 12)$ по заданному закону распределения СВ ξ :

ξ	12	14	17	21
P	0,1	0,4	0,2	0,3

1.2. Дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 0,5(x-2), & \text{если } 2 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найдите $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > 3)$, $P(1 < \xi \leqslant 3)$, $P(\xi = 2)$. Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

1.3. СВ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 4$, $\sigma_\xi = 2$. Найдите $P(0 \leqslant \xi \leqslant 5)$, $P(\xi = M\xi)$.

1.4. Вероятность повреждения детали при перевозке равна 0,002. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа поврежденных деталей в партии из 500 деталей.

Задание 2

2.1. По мишени производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором — 0,3, при третьем — 0,2. Составьте ряд распределения числа ξ попаданий в мишень. Найдите $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi \geqslant 3)$, $P(0 < \xi \leqslant 3)$, $P(\xi < 2)$.

2.2. Найдите a, $p(x)$, $M\xi$, σ_ξ, $D\xi$, $P(-1 < \xi \leqslant 2,5)$, $P(\xi = 3,5)$, если дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ a(x^2-1), & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

2.3. Для нормально распределенной СВ имеем $M\xi = 4$, $D\xi = 9$. Найдите вероятность того, что СВ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 2. Постройте график плотности распределения.

2.4. СВ ξ — время безотказной работы прибора подчинена показательному закону с параметром 6:

$$p(x) = \begin{cases} 6e^{-6x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что СВ примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Задание 3

3.1. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Составьте ряд распределения числа ξ промахов. Найдите $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(\xi > 5)$, $P(-1 < \xi \leqslant 3)$, $P(\xi < 2)$. Постройте график функции распределения.

3.2. Дана плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ ax, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите a, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > 0,5)$, $P(1 < \xi \leqslant 4)$. Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

3.3. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратичным отклонением 0,2 ден. ед. а) Найдите вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед. б) С помощью правила трех сигм найдите границы, в которых будет находиться цена акции.

3.4. СВ ξ имеет равномерное распределение с $M\xi = 3$, $D\xi = \dfrac{4}{3}$. Найдите $P(|\xi - M\xi| \leqslant \sigma_\xi)$.

Задание 4

4.1. Из урны, содержащей 5 белых и 2 черных шара, извлекают три шара. Составьте ряд распределения числа ξ белых шаров среди этих трех. Найдите $F(x)$, $M\xi$, σ_ξ, $P(\xi > 1)$, $P(-0,5 < \xi \leqslant 4)$, $P(\xi = 1,5)$, $P(\xi < 2)$. Постройте график функции распределения.

4.2. Дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ ax^3, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите a, $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi \geqslant 2)$, $P(1 < \xi \leqslant 5)$, $P(\xi = 4)$. Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

4.3. Размер диаметра втулок можно считать нормально распределенной СВ с математическим ожиданием $M\xi = 2,5$ см и дисперсией $D\xi = 0,01$ см^2. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

4.4. СВ ξ имеет биномиальное распределение с $M\xi = 0,8$ и $D\xi = 0,64$. Найдите $P(\xi \leqslant 1)$.

Задание 5

5.1. Из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, извлекают шары до появления белого. Составьте ряд распределения числа ξ извлеченных черных шаров. Найдите $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(\xi > 3)$, $P(1<\xi\leqslant 2)$, $P(\xi=1,2)$. Постройте график функции распределения.

5.2. Дана плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -2, \\ a(x+2), & \text{если } -2 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найдите a, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > 0,5)$, $P(-1 < \xi \leqslant 2)$, $P(\xi = 1)$. Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

5.3. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 520 г. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых меньше 480 г, если масса коробки считается нормально распределенной СВ?

5.4. Опытным путем установлено, что доля коротких волокон хлопка-сырца составляет в среднем 3% в каждой подопытной партии. Для СВ ξ — количества коротких волокон среди 200 проверенных — найдите $P(\xi > 2)$, $M\xi, D\xi$.

Задание 6

6.1. Игральную кость подбрасывают случайным образом 4 раза. Постройте ряд распределения СВ ξ — числа выпадений шестерки. Найдите среднее квадратичное отклонение и $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$.

6.2. Дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \leqslant 3, \\ a(x^2-9), & \text{если } 3 < x \leqslant 5, \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Найдите a, $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > 1,5)$, $P(2 < \xi \leqslant 5)$. Постройте графики функции распределения и плотности распределения.

6.3. Найдите вероятность попадания СВ ξ, распределенной по нормальному закону с $M\xi = 3$, $D\xi = 1$, в интервал $[2;\ 4]$. Постройте график функции $p(x)$.

6.4. Цена деления шкалы амперметра равна 0,5А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найдите вероятность того, что при отсчете сделана ошибка, превышающая 0,1А.

Ответы к контрольным заданиям

Задание 1. **1.1.** $M\xi = 16,5$; $D\xi = 10,65$; $\sigma_\xi \approx 3,3$; $P(M\xi - 3 < \xi \leqslant 17) = 0,6$; $P(\xi = 13) = 0$; $P(\xi = 12) = 0,1$. **1.2.** $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 0,5, & \text{если } 2 < x \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } x > 4; \end{cases}$ $M\xi = 3$; $D\xi = \dfrac{1}{3}$; $P(\xi > 3) = 0,5$; $P(1 < \xi \leqslant 3) = 0,5$; $P(\xi = 2) = 0$. **1.3.** $P(0 \leqslant \xi \leqslant 5) = 0,6687$; $P(\xi = M\xi) = 0$. **1.4.** $M\xi = 1$; $D\xi = 1$.

Задание 2. **2.1.**

ξ	0	1	2	3
P	0,336	0,452	0,188	0,024

$M\xi = 0,9$; $D\xi = 0,61$; $P(\xi \geqslant 3) = 0,024$; $P(0 < \xi \leqslant 3) = 0,664$; $P(\xi < 2) = 0,788$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,336 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,788 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,976 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

2.2. $a = \dfrac{1}{8}$; $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \frac{x}{4} & \text{при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 & \text{при } x > 3; \end{cases}$

$M\xi = \dfrac{13}{6}$; $D\xi = \dfrac{11}{36}$; $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$; $P(-1 < \xi \leqslant 2,5) = \dfrac{21}{32}$; $P(\xi = 3,5) = 0$.

2.3. $0,4972$. **2.4.** $0,632$.

Задание 3. **3.1.**

ξ	0	1	2	3	4
P	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

$M\xi = 2,3616$; $D\xi \approx 2,57$; $\sigma_\xi \approx 1,6$; $P(\xi > 5) = 0$; $P(-1 < \xi \leqslant 3) = 0,5904$;

$$P(\xi < 2) = 0,36;\ F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0,2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,36, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,488, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,5904, & \text{если } 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

3.2. $a = \dfrac{2}{9}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$M\xi = 2$; $D\xi = 0,5$; $P(\xi > 0,5) = \dfrac{35}{36}$;

$P(1 < \xi \leqslant 4) = \dfrac{8}{9}$. **3.3.** а) $0,9332$; б) (14,4 ден. ед.; 15,6 ден. ед.). **3.4.** $0,577$.

Задание 4. **4.1.**

ξ	1	2	3
P	1/7	4/7	2/7

$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{7}, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{5}{7}, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases}$

$M\xi = \dfrac{15}{7}$; $\sigma_\xi = \dfrac{2\sqrt{5}}{7}$; $P(\xi > 1) = \dfrac{6}{7}$; $P(-0,5 < \xi \leqslant 4) = 1$; $P(\xi = 1,5) = 0$; $P(\xi < 2) = \dfrac{1}{7}$. **4.2.** $a = \dfrac{1}{27}$; $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x > 3; \end{cases}$

$M\xi = 2,25$; $D\xi = 0,3375$; $P(\xi \geqslant 2) = \dfrac{19}{27}$; $P(1 < \xi \leqslant 5) = \dfrac{26}{27}$; $P(\xi = 4) = 0$. **4.3.** (2,2 см; 2,8 см). **4.4.** 0,8192.

Задание 5. **5.1.**

ξ	0	1	2	3	4
P	3/7	2/7	6/35	3/35	1/35

$M\xi = 1$; $D\xi = 1,2$; $\sigma_\xi \approx 1,1$; $P(\xi > 3) = \dfrac{1}{35}$; $P(1 < \xi \leqslant 2) = \dfrac{6}{35}$; $P(\xi = 1,2) = 0$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{3}{7} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{5}{7} & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{31}{35} & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ \frac{34}{35} & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$ **5.2.** $a = \dfrac{2}{9}$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ \frac{(x+2)^2}{9} & \text{при } -2 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases}$

$M\xi = 0$; $D\xi = 0,5$; $P(\xi > 0,5) = \dfrac{11}{36}$; $P(-1 < \xi \leqslant 2) = \dfrac{8}{9}$; $P(\xi = 1) = 0$. **5.3.** 0,05%. **5.4.** $P(\xi > 2) \approx 0,938$; $M\xi = D\xi = 6$.

Задание 6. **6.1.**

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

$P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) \approx 0,868$.

6.2. $a = \dfrac{1}{16}$; $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \leqslant 3, \\ \frac{x}{8}, & \text{если } 3 < x \leqslant 5, \\ 0, & \text{если } x > 5; \end{cases}$ $M\xi = \dfrac{49}{12}$; $D\xi = \dfrac{47}{144}$; $P(\xi > 1,5) = 1$; $P(2 < \xi \leqslant 5) = 1$. **6.3.** 0,6826. **6.4.** 0,8.

Консультации первого уровня

1.1. Найдите математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ по формулам (15) и (16); среднее квадратичное отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$. Вероятность $P(\xi = 12) = 0,1$ найдите из таблицы распределения;

значение 13 СВ не принимает, поэтому $P(\xi = 13) = 0$. Поскольку $M\xi = 16,5$, неравенству $M\xi - 3 < \xi \leqslant 17$, т. е. $13,5 < \xi \leqslant 17$, удовлетворяют только два возможных значения СВ ξ, т. е. 14 и 17, поэтому

$$P(M\xi - 3 < \xi \leqslant 17) = P(\xi = 14) + P(\xi = 17) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

1.2. Найдите плотность распределения по формуле $p(x) = F'(x)$, математическое ожидание $M\xi$ по формуле (20), $D\xi$ по формуле (16). Для вычисления вероятностей попадания СВ в интервал используйте формулу (18) или (19). Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 2) = 0$.

1.3. Вероятность $P(0 \leqslant \xi \leqslant 5)$ определяется по формуле (24). Аналогично предыдущей задаче, $P(\xi = M\xi) = 0$.

1.4. СВ ξ — число поврежденных деталей в партии из 500 деталей имеет распределение Пуассона с параметром $a = np = 500 \cdot 0,002 = 1$.

2.1. Какие значения может принимать СВ ξ? Для вычисления вероятностей $P(\xi = m)$, $m = 0, 1, 2, 3$, введите события $A_i = \{$попадание при i-м выстреле$\}$ $(i = 1, 2, 3)$ и используйте теоремы сложения и умножения вероятностей, представив события $\{\xi = m\}$ в виде суммы несовместных событий.

Найдите $M\xi$ и $D\xi$ по формулам (15) и (16). Для вычисления вероятностей $P(\xi \geqslant 3)$, $P(0 < \xi \leqslant 3)$, $P(\xi < 2)$ определите, какие возможные значения СВ ξ удовлетворяют указанным условиям. Найдите функцию распределения $F(x)$. Какими свойствами обладает функция распределения дискретной СВ?

2.2. Определите параметр a из условия непрерывности функции распределения непрерывной СВ во всех точках: $F(x_0 + 0) = F(x_0 - 0)$ в любой точке x_0. Для вычисления $M\xi$ и $D\xi$ по формулам (20) и (16) найдите плотность распределения $p(x) = F'(x)$. Для вычисления вероятностей используйте формулу (18) или (19).

2.3. $a = M\xi$; $\sigma = \sqrt{D\xi}$. По формуле (25) найдите $P(|\xi - M\xi| \leqslant 2)$.

2.4. $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$. Для вычисления вероятности найдите выражение для функции распределения показательного закона (22) и используйте равенство $F(x) = P(\xi < x)$.

3.1. Какие значения может принимать СВ ξ? В каком случае СВ ξ принимает значение 0? значение 4? Получив ряд распределения, проверьте, выполняется ли свойство нормировки (14). Далее см. указания к задаче 2.1.

3.2. Найдите коэффициент a из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$ по формулам (20) и (16). Найдите функцию распределения по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$, рассмотрев отдельно случаи $x \leqslant 0$; $0 < x \leqslant 3$; $x > 3$. Для вычисления вероятностей используйте формулу (18) или (19).

3.3. СВ ξ — текущая цена акции — имеет нормальное распределение с параметрами $a = M\xi$ и $\sigma = \sigma_\xi$. а) Найдите вероятность $P(\xi \leqslant 15,3)$ по формуле (24). б) Найдите интервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

3.4. Числовые характеристики равномерного на $[a; b]$ распределения равны $M\xi = \dfrac{a+b}{2}$, $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. По условию задачи $M\xi = 3$, $D\xi = \dfrac{4}{3}$. Отсюда $b = 5$, $a = 1$. Вычислите вероятность по формуле (18), воспользовавшись видом функции равномерного распределения, или по формуле (19).

4.1. Какие значения может принимать СВ ξ? Может ли она принимать значение 0? Найдите вероятности возможных значений, используя схему задачи 8. Получив ряд распределения, проверьте, выполняется ли свойство (14). Далее см. указания к задаче 2.1.

4.2. См. указания к задаче 2.2.

4.3. $a = M\xi$; $\sigma = \sqrt{D\xi}$. Примените правило трех сигм.

4.4. Найдите параметры n и p биномиального распределения, выразив $M\xi$ и $D\xi$ через n и p по формуле (17). Вычислите $P(\xi \leqslant 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1)$, применив формулу Бернулли (8).

5.1. Какие значения может принимать СВ ξ? В каком случае она принимает значение 0? Сколько шаров и в каком порядке извлекается, если ξ принимает значение 1? значение 2? Примените теорему умножения вероятностей зависимых событий для определения вероятностей возможных значений СВ ξ. Получив ряд распределения, проверьте, выполняется ли свойство (14). Далее см. указания к задаче 2.1.

5.2. См. указания к задаче 3.2.

5.3. ξ — масса коробки; $a = M\xi = 520$ г. Определите параметр σ из условия $P(\xi < 500) = \Phi\left(-\dfrac{20}{\sigma}\right) + 0,5 = 0,05$. Найдите вероятность $P(\xi < 480) \approx 0,0005$.

5.4. Поскольку каждое из $n = 200$ волокон независимо от других с вероятностью $p = 0,03$ (вероятность мала) может оказаться коротким, можно считать, что СВ ξ имеет распределение Пуассона с параметром

$a = np$. Отсюда $M\xi = D\xi = a$. Какие значения может принимать СВ, распределенная по закону Пуассона? Для вычисления вероятности $P(\xi > 2)$ перейдите к противоположному событию. Какие значения ξ удовлетворяют условию $\xi > 2$? Какие не удовлетворяют?

6.1. Поскольку ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = \dfrac{1}{6}$, то $P(\xi = m) = C_4^m \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^m \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{4-m}$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4)$. Т. к. $M\xi = np = \dfrac{2}{3} \approx 0,667$; $D\xi = npq = \dfrac{5}{9}$; $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,745$, то $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1)$.

6.2. См. указания к задаче 2.2.

6.3. Найдите вероятность $P(2 \leqslant \xi \leqslant 4)$ по формуле (24) с $a = M\xi$, $\sigma = \sqrt{D\xi}$. График плотности распределения строится аналогично рис. 20.

6.4. СВ ξ — разность между показанием амперметра и ближайшим целым его делением — имеет равномерное распределение на отрезке $[-0,5; 0,5]$. Запишите плотность распределения СВ ξ (см. (21)). Требуется найти вероятность

$$P(|\xi| > 0,1) = 1 - P(|\xi| \leqslant 0,1) = 1 - \int\limits_{-0,1}^{0,1} \frac{1}{0,5 + 0,5} dx = 0,8.$$

Консультации второго уровня

Задание 1

1.1. Найдем математическое ожидание $M\xi$ по формуле (15):

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 =$$
$$= 12 \cdot 0,1 + 14 \cdot 0,4 + 17 \cdot 0,2 + 21 \cdot 0,3 = 1,2 + 5,6 + 3,4 + 6,3 = 16,5.$$

Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения СВ ξ^2:

ξ^2	144	196	289	441
P	0,1	0,4	0,2	0,3

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 = 144 \cdot 0,1 + 196 \cdot 0,4 + 289 \cdot 0,2 + 441 \cdot 0,3 =$$
$$= 14,4 + 78,4 + 57,8 + 132,3 = 282,9.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле (16): $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 282,9 - 16,5^2 = 10,65$. Среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{10,65} \approx 3,3$.

По заданному закону распределения определяем, что СВ ξ принимает значение 12 с вероятностью 0,1, а значение 13 не принимает (оно не указано среди возможных значений ξ в ряде распределения), поэтому $P(\xi = 12) = 0,1$; $P(\xi = 13) = 0$. Чтобы найти $P(M\xi - 3 < \xi \leqslant 17)$, выясним, какие значения СВ попадают в интервал $(M\xi - 3; 17]$, т. е. в интервал $(13,5; 17]$. Это значения 14 и 17. Тогда

$$P(M\xi - 3 < \xi \leqslant 17) = P(\xi = 14) + P(\xi = 17) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

1.2. Найдем плотность вероятности $p(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 0,5, & \text{если } 2 < x \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание $M\xi$ по формуле (20):

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{2}^{4} x \cdot 0,5 \cdot dx = 0,25x^2\Big|_2^4 = 0,25 \cdot 4^2 - 0,25 \cdot 2^2 = 3.$$

Вычислим

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int\limits_{2}^{4} x^2 \cdot 0,5 \cdot dx = 0,5 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{4^3}{6} - \frac{2^3}{6} = \frac{28}{3}$$

и найдем $D\xi$ по формуле (16): $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \dfrac{28}{3} - 9 = \dfrac{1}{3}$.

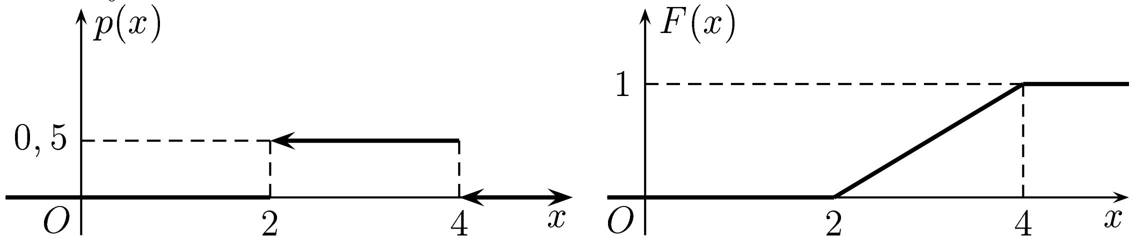
Заметим, что СВ ξ распределена равномерно на отрезке $[2; 4]$, поэтому ее числовые характеристики можно также определить по формулам (17): $M\xi = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$, $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{(4-2)^2}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Вычислим вероятности по формуле (18):

$$P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = F(+\infty) - F(3) = 1 - 0,5 \cdot (3 - 2) = 0,5;$$
$$P(1 < \xi \leqslant 3) = F(3) - F(1) = 0,5 \cdot (3 - 2) - 0 = 0,5.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 2) = 0$.

Графики плотности распределения и функции распределения имеют следующий вид:



1.3. Так как $a = 4$, $\sigma = 2$, то по формуле (24) находим

$$P(0 \leqslant \xi \leqslant 5) = \Phi\left(\frac{5-4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-4}{2}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-2) \approx$$
$$\approx 0,1915 - (-0,4772) = 0,6687.$$

В силу непрерывности СВ ξ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = M\xi) = 0$.

1.4. Мы имеем повторение испытаний в случае, когда число независимых испытаний $n = 500$ — велико, а $p = 0,002$ — очень мало. Рассматриваемая СВ имеет распределение Пуассона с параметром $a = np = 500 \cdot 0,002 = 1$. Математическое ожидание и дисперсия такой СВ равны $M\xi = D\xi = a = 1$.

Задание 2

2.1. Дискретная СВ ξ — число попаданий в мишень при трех выстрелах имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности этих возможных значений.

Для вычисления вероятностей введем события A_i = {попадание при i-м выстреле} ($i = 1, 2, 3$), вероятности которых известны: $P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,2$.

СВ ξ примет возможное значение 0 (нет попаданий в мишень), если при каждом из трех выстрелов будет промах, т. е. если произойдет событие $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Поскольку $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,4 = 0,6$; $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,3 = 0,7$; $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,2 = 0,8$, по теореме умножения вероятностей независимых событий определяем $P(\xi = 0) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$.

СВ ξ примет возможное значение 1 (одно попадание в мишень), если будет одно попадание и два промаха. Выразим событие $\{\xi = 1\}$ = {только одно попадание} через A_1, A_2, A_3, представив его в виде суммы несовместных событий: либо попали только при первом выстреле (произошло событие $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо попали только при втором выстреле (произошло $\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$), либо попали только при третьем выстреле (произошло $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$), т. е. $\{\xi = 1\} = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$. Поскольку события-слагаемые несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$$P(\xi = 1) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,452.$$

Аналогично найдем

$$P(\xi = 2) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188;$$
$$P(\xi = 3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Контроль: $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 1$.

Напишем искомый закон распределения:

ξ	0	1	2	3
P	$0,336$	$0,452$	$0,188$	0,024

Найдем математическое ожидание $M\xi$ по формуле (15):

$$M\xi = 0 \cdot 0,336 + 1 \cdot 0,452 + 2 \cdot 0,188 + 3 \cdot 0,024 = 0,9.$$

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$ и дисперсию $D\xi$ по формуле (16):

$$M(\xi^2) = 0 \cdot 0,336 + 1 \cdot 0,452 + 4 \cdot 0,188 + 9 \cdot 0,024 = 1,42;$$
$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 1,42 - 0,9^2 = 0,61.$$

Чтобы найти $P(\xi \geqslant 3)$, посмотрим, какие значения СВ попадают в интервал $[3, +\infty)$. Этому условию удовлетворяет только значение 3, поэтому $P(\xi \geqslant 3) = P(\xi = 3) = 0,024$. Условию $0 < \xi \leqslant 3$ удовлетворяют значения 1, 2 и 3, поэтому

$$P(0 < \xi \leqslant 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$
$$= 0,452 + 0,188 + 0,024 = 0,664.$$

Аналогично, $P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,336 + 0,452 = 0,788.$

Найдем функцию распределения $F(x)$. Учитывая, что функция распределения дискретной СВ ξ является кусочно-постоянной функцией, терпит разрывы в точках 0, 1, 2, 3, соответствующих возможным значениям ξ, и величины скачков в точках разрыва равны вероятностям соответствующих значений, имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,336 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,336 + 0,452 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,788 + 0,188 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,976 + 0,024 & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,336 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,788 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,976 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

2.2. Для нахождения коэффициента a можно использовать различные свойства плотности и функции распределения.

I способ. Функция распределения непрерывной СВ непрерывна в любой точке, следовательно, $F(x_0 + 0) = F(x_0 - 0)$ в любой точке x_0, в частности в точках, где меняется аналитическое задание функции:

$$F(1 + 0) = \lim_{x \to 1+0} F(x) = \lim_{x \to 1+0} a(x^2 - 1) = a \cdot 0 = 0;$$
$$F(1 - 0) = \lim_{x \to 1-0} F(x) = \lim_{x \to 1-0} 0 = 0 = F(1 + 0) \text{ — верно};$$
$$F(3 + 0) = \lim_{x \to 3+0} F(x) = \lim_{x \to 3+0} 1 = 1;$$
$$F(3 - 0) = \lim_{x \to 3-0} F(x) = \lim_{x \to 3-0} a(x^2 - 1) = a \cdot 8 = 8a.$$

Из соображений непрерывности $1 = 8a$, поэтому $a = \dfrac{1}{8}$.

II способ. Используем свойство плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Найдем плотность вероятности $p(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 2ax, & 1 < x \leqslant 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{1}^{3} 2axdx = ax^2\Big|_1^3 = 8a$, т. е. $8a = 1$; $\Rightarrow a = \dfrac{1}{8}$.

Подставляя найденное a, получим

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1), & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \frac{x}{4}, & 1 < x \leqslant 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{1}^{3} x \cdot \frac{x}{4} \cdot dx = \frac{x^3}{12}\Big|_1^3 = \frac{27 - 1}{12} = \frac{13}{6};$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - (M\xi)^2 = \int\limits_{1}^{3} x^2 \cdot \frac{x}{4} \cdot dx - \left(\frac{13}{6}\right)^2 =$$

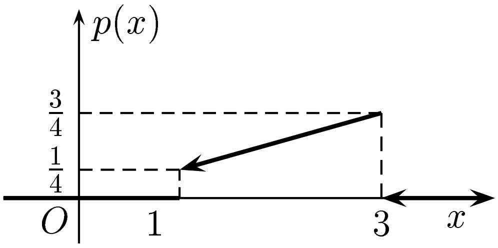
$$= \frac{x^4}{16}\Big|_1^3 - \frac{169}{36} = \frac{81 - 1}{16} - \frac{169}{36} = \frac{11}{36}; \quad \sigma_\xi = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

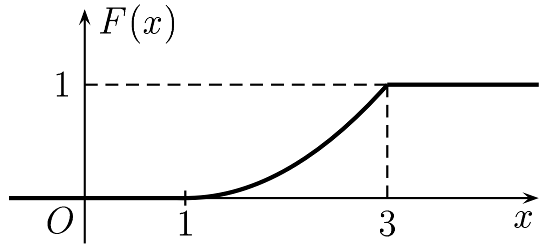
Вычислим вероятность по формуле (18):

$$P(-1 < \xi \leqslant 2,5) = F(2,5) - F(-1) = \frac{1}{8} \cdot ((2,5)^2 - 1) - 0 = \frac{21}{32}.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 3,5) = 0$.

Графики плотности распределения и функции распределения имеют следующий вид:



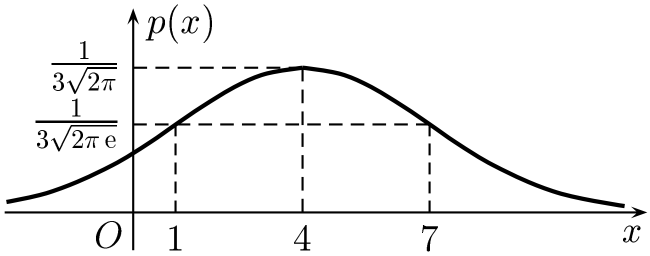


2.3. Требуется определить вероятность того, что значение СВ ξ отклонится от $M\xi$ не более чем на 2, т. е. вероятность неравенства $-2 \leqslant \xi - M\xi \leqslant 2$, или $|\xi - M\xi| \leqslant 2$. Т. к. $a = M\xi = 4$; $\sigma = \sqrt{D\xi} = 3$, то по формуле (25) находим

$$P(|\xi - M\xi| \leqslant 2) = P(|\xi - 4| \leqslant 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx 2 \cdot 0,2486 = 0,4972.$$

Аналогично рис. 20 построим график плотности распределения

$$p(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$



2.4. СВ ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda = 6$. В случае показательного закона распределения математическое ожидание равно $M\xi = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{6}$.

В силу (22) функция распределения при $\lambda = 6$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-6x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку $F(x) = P(\xi < x)$, то

$$P(\xi < M\xi) = P\left(\xi < \frac{1}{6}\right) = F\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-6\cdot\frac{1}{6}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,632.$$

Задание 3

3.1. Дискретная СВ ξ — число промахов при четырех выстрелах — имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3, 4. Найдем вероятности этих значений.

СВ ξ примет значение 0 (нет промахов), если охотник попадет при первом выстреле (при этом он больше не стреляет); вероятность этого равна 0,2. Таким образом, $P(\xi = 0) = 0,2$. СВ ξ примет значение 1 (один промах), если охотник промахнется при первом (вероятность этого $1 - 0,2 = 0,8$) и попадет при втором выстреле. По теореме умножения вероятностей независимых событий получим $P(\xi = 1) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$. Аналогично найдем
$P(\xi = 2) = 0,8\cdot 0,8\cdot 0,2 = 0,128$; $P(\xi = 3) = 0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,2 = 0,1024$.

СВ примет значение 4, если охотник промахнется 4 раза. Тогда у него закончатся патроны и больше он стрелять не будет, поэтому $P(\xi = 4) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,4096$.

Контроль: $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,4096 = 1$.

Напишем искомый закон распределения:

ξ	0	1	2	3	4
P	$0,2$	$0,16$	$0,128$	$0,1024$	$0,4096$

Найдем математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ по формулам (15) и (16):
$M\xi = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,128 + 3 \cdot 0,1024 + 4 \cdot 0,4096 = 2,3616$;
$D\xi = 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,16 + 4\cdot 0,128 + 9\cdot 0,1024 + 16\cdot 0,4096 - 2,3616^2 \approx 2,57$.
Среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_\xi \approx \sqrt{2,57} \approx 1,6$.

Условию $\xi > 5$ ни одно из возможных значений СВ ξ не удовлетворяет, поэтому $P(\xi > 5) = 0$. В интервал $(-1; 3]$ попадают четыре возможных значения ξ (значения 0, 1, 2 и 3), поэтому

$$P(-1 < \xi \leqslant 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = \\ = 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 = 0,5904.$$

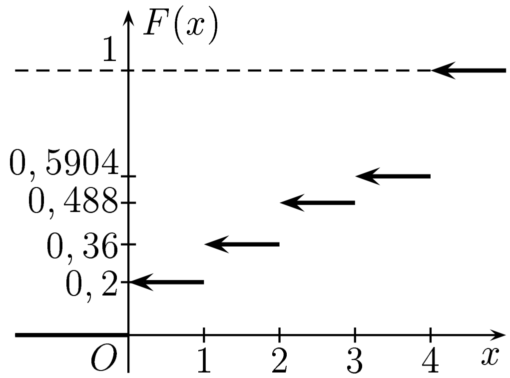
Аналогично $P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,2 + 0,16 = 0,36$.

Найдем функцию распределения $F(x)$, учитывая, что функция распределения дискретной СВ ξ является кусочно-постоянной функцией, терпит разрывы в точках 0, 1, 2, 3, 4, соответствующих возможным значениям ξ, и величины скачков в точках разрыва равны вероятностям соответствующих значений:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0,2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,2 + 0,16, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,36 + 0,128, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,488 + 0,1024, & \text{если } 3 < x \leqslant 4, \\ 0,5904 + 0,4096, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0,2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,36, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,488, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,5904, & \text{если } 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$



3.2. Для нахождения коэффициента a используем свойство плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{0}^{3} axdx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9}{2}a = 1, \text{ т. е. } a = \frac{2}{9}.$$

Следовательно, $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \leqslant 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{0}^{3} x \cdot \frac{2x}{9} \cdot dx = \frac{2x^3}{27}\bigg|_0^3 = 2;$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M\xi)^2 = \int\limits_{0}^{3} x^2 \cdot \frac{2x}{9} \cdot dx - 2^2 = \frac{x^4}{18}\bigg|_0^3 - 4 = 0,5.$$

Найдем функцию распределения:

при $x \leqslant 0$ имеем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$

при $0 < x \leqslant 3$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{2t}{9}dt = 0 + \frac{t^2}{9}\bigg|_0^x = \frac{x^2}{9};$

при $x > 3$ получим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{3} \frac{2t}{9}dt + \int\limits_{3}^{x} 0dt = 0 + \frac{t^2}{9}\bigg|_0^3 + 0 = 1.$$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

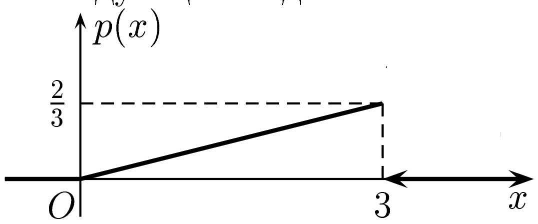
По формуле (18) найдем

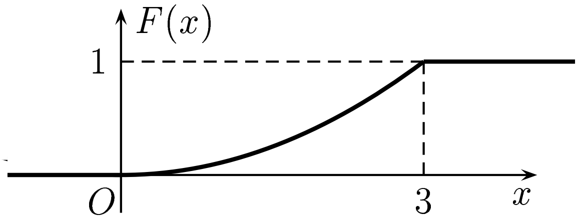
$$P(\xi > 0,5) = F(+\infty) - F(0,5) = 1 - \frac{(0,5)^2}{9} = \frac{35}{36};$$

$$P(1 < \xi \leqslant 4) = F(4) - F(1) = 1 - \frac{1^2}{9} = \frac{8}{9}.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 0,5) = 0$.

Графики плотности распределения и функции распределения имеют следующий вид:





3.3. Пусть СВ ξ — текущая цена акции. По условию ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = M\xi = 15$ ден. ед. и $\sigma = \sigma_\xi = 0,2$ ден. ед.

а) По формуле (24) найдем вероятность

$$P(\xi \leqslant 15,3) = P(-\infty < \xi \leqslant 15,3) = \Phi\left(\frac{15,3-15}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-15}{0,2}\right) =$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(-\infty) \approx 0,4332 - (-0,5) = 0,9332.$$

б) По правилу трех сигм с вероятностью 0,9973 СВ $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$ попадает в интервал $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Следовательно, практически достоверно, что цена акции будет находиться в пределах от $15-3\cdot 0,2 = 14,4$ ден. ед. до $15+3\cdot 0,2 = 15,6$ ден. ед.

3.4. Числовые характеристики СВ ξ, распределенной равномерно на $[a;b]$, равны $M\xi = \dfrac{a+b}{2}$; $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. Поскольку по условию задачи $M\xi = 3$, $D\xi = \dfrac{4}{3}$, решаем систему уравнений, считая $a < b$:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} & = 3, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} & = \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} & = 3, \\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} & = \dfrac{2}{\sqrt{3}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b & = 6, \\ b-a & = 4. \end{cases}$$

Отсюда $b = 5$, $a = 1$.

Функция распределения СВ, распределенной равномерно на $[1;5]$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{4} & \text{при } x \in [1;5], \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

По формуле (18) найдем

$$P(|\xi - M\xi| \leqslant \sigma_\xi) = P\left(|\xi - 3| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = P\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant \xi - 3 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= P\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + 3 \leqslant \xi \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} + 3\right) = F\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 3\right) - F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + 3\right).$$

Поскольку $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 3 \approx 4,155 \in [1;5]$ и $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 3 \approx 1,845 \in [1;5]$, то

$$P(|\xi - M\xi| \leqslant \sigma_\xi) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + 3 - 1}{4} - \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} + 3 - 1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Раздел 1.2

11. $\dfrac{3}{4}$. $\Omega =${ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}; $n = 4$, $m = 3$. Примените классическое определение вероятности.

12. $\dfrac{3}{4}$. $\Omega =${ЧЧ, ЧН, НЧ, НН}; $n = 4$, $m = 3$. Примените классическое определение вероятности. Распространенной ошибкой является использование следующего пространства элементарных событий $\Omega =${2 четных; четное и нечетное; 2 нечетных}; $n = 3$, $m = 2$. В этом случае исходы не равновозможны и классическое определение вероятности неприменимо.

13. $\dfrac{1}{6}$. Число элементарных исходов $n = 36$ (см. задачу 2). Благоприятные исходы: $(1;6)$; $(2;5)$; $(3;4)$; $(4;3)$; $(5;2)$; $(6;1)$.

14. а) $\dfrac{1}{18}$; б) $\dfrac{1}{2}$. а) Число элементарных исходов $n = 36$ (см. задачу 2). Благоприятных исходов два: $(2;6)$; $(6;2)$. б) $\Omega =\{(1;5); (2;6); (5;1); (6;2)\}$; $A = \{(2;6);\ (6;2)\}$.

15. $\dfrac{1}{3}$. $n = 33$ (элементарным исходом является извлечение одного из $10+11+12 = 33$ шаров; события: $A_1 =$ {извлечение белого шара}, $A_2 =$ {извлечение черного шара}, $A_3 =$ {извлечение красного шара} не являются равновозможными, их нельзя использовать для вычисления вероятности по классическому определению); $m = 11$.

16. $\dfrac{32}{33}$. $n = 495$ (после изъятия 5 аккумуляторов осталось $500 - 5 = 495$ аккумуляторов); $m = 480$ (считается, что после года хранения исправных аккумуляторов остается $500 - 20 = 480$).

17. а) $\dfrac{1}{90}$; б) $\dfrac{1}{81}$. а) $n = 10 \cdot 9 = 90$, т. к. первую цифру можно выбрать 9 способами (это может быть любая цифра, кроме 0), а вторую — 10 способами (это может быть любая цифра); $m = 1$, т. к. правильный ответ может быть только один. б) $n = 9 \cdot 9 = 81$, т. к. первую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра, кроме 0), а вторую — 9 способами (любая цифра, кроме той, которая названа первой); $m = 1$.

18. $\dfrac{1}{120}$. Элементарными исходами являются все возможные перестановки пяти номеров кубиков (первым может появиться любой из 5 кубиков, вторым — любой из оставшихся 4 и т. д.). $n = 5!$; $m = 1$.

19. $\dfrac{3!2!2!}{10!}$. См. задачу 5.

20. $\dfrac{5}{9}$. Заметим, что события A_1 — вынуты 2 черных шара, A_2 — вынуты 2 белых шара, A_3 — вынуты 1 черный и 1 белый шар — образуют полную группу событий, но не являются равновозможными. В этой задаче надо использовать схему задачи 8. Равновозможными элементарными исходами являются сочетания из 9 шаров по 2, $n = C_9^2 = 36$. Благоприятными исходами будут те сочетания, в которых один шар черный, а другой — белый. Один черный шар из имеющихся пяти можно выбрать 5 способами, а один белый шар из четырех — 4 способами. Следовательно, сочетания — 1 белый шар и 1 черный шар — можно получить $4 \cdot 5 = 20$ способами, т. е. $m = 20$.

21. $\dfrac{20}{91}$. Используйте схему задачи 8:

Имеем:	10 окрашенных	+ 5 неокрашенных	= 15 деталей
Извлечь:	1 окрашенную	+ 2 неокрашенные	= 3 детали

Благоприятными исходами будут выборки, содержащие 1 окрашенную и 2 неокрашенные детали. $n = C_{15}^3 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$, $m = C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 100$.

22. $\dfrac{1}{190}$. Используйте схему задачи 8. Число элементарных исходов равно числу способов выбрать 2 карточки из 20, $n = C_{20}^2 = 190$. Благоприятный исход только один — должны быть выбраны карточки с номерами 101 и 120, это можно сделать единственным образом.

23. а) $\dfrac{115}{203}$; б) $\dfrac{75}{203}$. Используя схему задачи 8, получаем: а) $P(A) = \dfrac{C_{25}^3 \cdot C_5^0}{C_{30}^3} = \dfrac{115}{203} \approx 0,567$; б) $P(A) = \dfrac{C_{25}^2 \cdot C_5^1}{C_{30}^3} = \dfrac{75}{203} \approx 0,369$.

24. $0,181$. Используйте схему задачи 8. Число равновозможных элементарных исходов $n = C_{100}^{50}$ (число способов отобрать половину изделий для проверки). Для того чтобы партия была принята, в выборке из 50 изделий должно быть не более 2% бракованных изделий, т. е. не более одного изделия. Поэтому число благоприятных исходов $m = C_5^0 \cdot C_{95}^{50} + C_5^1 \cdot C_{95}^{49}$ (либо в выборке все изделия качественные, либо 1 бракованное и 49 качественных). Далее следует преобразовать:

$$m = \frac{95!}{50!45!} + 5 \cdot \frac{95!}{49!46!} = \frac{95!}{50!46!} \cdot (46 + 5 \cdot 50) = 296 \cdot \frac{95!}{50!46!};$$

$$n = \frac{100!}{50!50!} = \frac{95!}{50!46!} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} = \frac{8 \cdot 99 \cdot 97}{47} \cdot \frac{95!}{50!46!};$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=296\cdot\frac{95!}{50!46!}:\left(\frac{8\cdot 99\cdot 97}{47}\cdot\frac{95!}{50!46!}\right)=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}\approx 0,181.$$

25. а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. Используйте геометрическое определение вероятности. а) Диагональ вписанного квадрата равна $2R$, а сторона $\sqrt{2}R$. б) Сторона треугольника равна $a=\sqrt{3}R$, $S_{\text{треуг.}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot\frac{3}{2}R=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

26. $\frac{0,5\pi R^2}{\pi R^2}=0,5$. Площади черной и белой частей диска равны.

27. $0,25$. Элементарные исходы испытания описываются условием $0\leqslant x\leqslant 4$, т. е. $x\in[0;4]$, длина этого отрезка $l_\Omega=4$. Круг не пересекает ближайшую к нему прямую, если $x\geqslant 3$, т. е. $x\in[3;4]$, длина этого отрезка $l_A=1$.

28. $0,5$. Координаты точек B и C должны удовлетворять неравенствам: $0\leqslant x_1\leqslant L$, $0\leqslant x_2\leqslant L$, $x_2\geqslant x_1$. В системе координат Ox_1x_2 указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей прямоугольному треугольнику OKM (см. рис. 22). Таким образом, этот треугольник можно рассматривать в качестве фигуры Ω, $S_\Omega=\frac{1}{2}\cdot KM\cdot OK=\frac{1}{2}L^2$. Длина отрезка BC должна быть меньше длины отрезка OB, т. е. должно иметь место неравенство $x_2-x_1<x_1$, или, что то же, $x_2<2x_1$. Это неравенство выполняется для координат тех точек фигуры Ω, которые лежат ниже прямой $y=2x$ (прямая ON). Как видно из рис. 22, все эти точки принадлежат заштрихованному треугольнику ONM. Таким образом, $S_A=S_{ONM}=\frac{1}{2}\cdot NM\cdot OK=\frac{1}{4}L^2$.

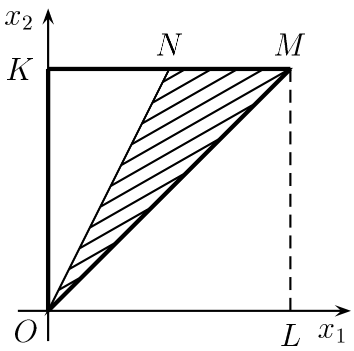


Рис. 22

Раздел 1.3

37. $0,6561$. Прибор будет работать, если будут работать все его блоки. События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы, $P(A_i)=0,9$ для всех $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Вероятность события $A=A_1A_2A_3A_4$ равна $P(A)=$ $=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0,9^4$.

38. $0,392$. Обозначим $A=\{$хотя бы один из пяти узлов технического устройства окажется неисправным$\}$. Тогда $A=A_1+A_2+$ $+A_3+A_4+A_5$. Поскольку события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 совместны, для вычисления вероятности события A следует перейти к противоположному событию $\overline{A}=\{$все узлы технического устройства во время его работы будут исправными$\}$; $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5$. Учитывая независимость событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, $\overline{A}_5$ и свойство вероятности противоположного события, получим $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,9\cdot 0,85\cdot 0,88\cdot 0,95\cdot 0,95$.

39. $0,936$. Обозначим $A=\{$сделано не более трех выстрелов$\}$. Тогда $\overline{A}=\{$производится 4-й выстрел$\}=\{$промахнулись при первых трех выстрелах$\}$. Если $A_i=\{$попали при i-м выстреле$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, то

$\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,4^3=0,936$. Другой способ решения — представить событие A в виде суммы несовместных событий: $A=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

40. $0,479$. Событие $A=\{$оба шара одного цвета$\}=B_1+B_2$. Если $A_i=\{$из i-й урны извлекли белый шар$\}$ $(i=1,\ 2)$, то $A=A_1A_2+$ $+\overline{A}_1\overline{A}_2$. Поскольку слагаемые несовместны, а множители независимы, то $P(A)=\dfrac{5}{16}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{11}{16}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{23}{48}$.

41. а) $\dfrac{1}{495}$; б) $\dfrac{1}{27720}$; в) $\dfrac{8}{11!}$. а) Обозначим Т, У, Р и т. д. события, состоящие в выборе соответствующей буквы, и пусть буквосочетание ТУР означает, что первой выбрана буква Т, второй У, третьей Р. Тогда $P(\text{ТУР})=P(\text{Т})P(\text{У}|\text{Т})P(\text{Р}|\text{ТУ})=\dfrac{2}{11}\cdot\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{9}$. б) $P(\text{СЕВЕР})=$ $=P(\text{С})P(\text{Е}|\text{С})P(\text{В}|\text{СЕ})P(\text{Е}|\text{СЕВ})P(\text{Р}|\text{СЕВЕ})=\dfrac{1}{11}\cdot\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{7}$.

42. $0,14$. См. задачу 30. $P(A)=0,95\cdot(1-0,9)+(1-0,95)\cdot0,9$.

43. $0,08$. См. задачи 31 и 32. $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, причем слагаемые несовместны, а множители независимы; $P(A_1)=0,9$, $P(A_2)=0,8$, $P(A_3)=0,75$.

44. $0,064$. $P(A_1)=1-0,005=0,995$, $P(A_2)=1-0,02=0,98$, $P(A_3)=1-0,04=0,96$. Если $A=\{$пара ботинок содержит дефекты$\}$, то $\overline{A}=\{$пара ботинок не содержит дефектов$\}$; $\overline{A}=A_1A_2A_3$, $P(\overline{A})=$ $=0,995\cdot0,98\cdot0,96\approx0,936$; $P(A)=1-P(\overline{A})\approx0,064$.

45. $P(A)=0,368$; $P(B)=0,904$. См. задачи 31 и 32. Если $A_i=$ $=\{$попадание при i-м выстреле$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, то $P(A_1)=0,8$, $P(A_2)=$ $=0,4$, $P(A_3)=0,2$. События $A=\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{B}=$ $=\{$ни одного попадания$\}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

46. а) $\dfrac{22}{91}$; б) $\dfrac{67}{91}$. В результате испытания (библиотекарь берет наудачу 3 учебника) произойдет одно из 4 несовместных событий: $B_i=\{$из взятых учебников ровно i штук будут в переплете$\}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$. Тогда $A=B_2+B_3$; $B=B_1+B_2+B_3$; $\overline{B}=B_0$. Вероятности событий B_i вычисляются по схеме задачи 8.

47. а) $0,504$; б) $0,994$. Пусть $A=\{$в цепи будет ток$\}$, $A_i=\{i$-я лампочка исправна$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. При последовательном соединении $A=A_1A_2A_3=\{$все лампочки исправны$\}$ (множители независимы). При параллельном соединении $A=A_1+A_2+A_3=\{$хотя бы одна лампочка исправна$\}$, $\overline{A}=\{$ни одна лампочка не исправна$\}$.

48. $0,78$. $A=\{$извлечена деталь отличного качества$\}$, $H_i=\{$извлечена деталь i-го завода$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$; $P(H_1)=\dfrac{12}{12+20+18}=\dfrac{12}{50}=$

$= 0,24$, $P(H_2) = \dfrac{20}{50} = 0,4$, $P(H_3) = \dfrac{18}{50} = 0,36$.

49. $0,85$. $A =$ {мишень поражена}, $H_1 =$ {стрелок выстрелил из винтовки с оптическим прицелом}, $H_2 =$ {стрелок выстрелил из винтовки без оптического прицела}; $P(A|H_1) = 0,95$, $P(A|H_2) = 0,7$; $P(H_1) = \dfrac{3}{5}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{5}$.

50. $0,09$. См. задачу 35. $A =$ {приобретенный телевизор потребует ремонта}, $H_i =$ {приобретенный телевизор поступил от i-го поставщика} ($i = 1, 2, 3$). $P(H_1) = 0,1$, $P(H_2) = 0,4$, $P(H_3) = 0,5$, т. к. если от 1-го поставщика поступает k телевизоров, то от 2-го — $4k$, от 3-го — $5k$, всего — $10k$ телевизоров; $P(A|H_1) = 1 - 0,98 = 0,02$, $P(A|H_2) = 1 - 0,88 = 0,12$, $P(A|H_3) = 1 - 0,92 = 0,08$.

51. $0,717$. $A =$ {наудачу извлеченная деталь стандартная}, $H_i =$ {деталь извлечена из i-го ящика} ($i = 1, 2, 3$). Т. к. ящик выбирается наудачу, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$. По классическому определению вероятности, $P(A|H_1) = \dfrac{15}{20} = 0,75$, $P(A|H_2) = \dfrac{24}{30} = 0,8$, $P(A|H_3) = \dfrac{6}{10} = 0,6$.

52. $0,5$. $H_i =$ {в 3-й урне i белых шаров} ($i = 0, 1, 2$). Тогда $P(H_0) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{16}{20} = 0,16$ (вероятность того, что из обеих урн взяли черные шары), $P(H_1) = \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{16}{20} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{4}{20} = 0,68$ (из 1-й урны взяли белый шар, а из 2-й черный, или наоборот), $P(H_2) = \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{4}{20} = 0,16$. Контроль: $P(H_0)+P(H_1)+P(H_2) = 1$. Если $A =$ {из 3-й урны извлекли белый шар}, то $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0,5$, $P(A|H_2) = 1$.

53. $0,461$. $A =$ {оба стрелка попали в цель}. Возможны 6 гипотез о двух вызванных стрелках: H_1 — два отличных стрелка, H_2 — два хороших стрелка, H_3 — два посредственных стрелка, H_4 — отличный и хороший стрелки, H_5 — отличный и посредственный стрелки, H_6 — хороший и посредственный стрелки. Вероятности гипотез вычисляются по схеме задачи 8, например, $P(H_1) = \dfrac{C_4^2}{C_{20}^2} = \dfrac{6}{190}$ (проверьте, что сумма вероятностей гипотез равна 1), а условные вероятности события A вычисляются по теореме умножения вероятностей независимых событий. $P(A) = \dfrac{6}{190} \cdot 0,9^2 + \dfrac{45}{190} \cdot 0,7^2 + \dfrac{15}{190} \cdot 0,5^2 + \dfrac{40}{190} \cdot 0,9 \cdot 0,7 + \dfrac{24}{190} \cdot 0,9 \cdot 0,5 + \dfrac{60}{190} \cdot 0,7 \cdot 0,5 \approx 0,461$.

54. Вероятнее, что винтовка была без оптического прицела. $A =$ {стрелок поразил мишень}, $H_1 =$ {стрелок выстрелил из винтовки с оптическим прицелом}, $H_2 =$ {стрелок выстрелил из винтовки без оптического прицела}; $P(H_1) = 0,4$,

$P(H_2) = 0,6$; по формуле Байеса (7) $P(H_1|A) = \dfrac{19}{43}$, $P(H_2|A) = \dfrac{24}{43}$.

55. Наиболее вероятно, что переложили 1 белый и 1 черный шар. $H_1 = \{$переложили 2 белых шара$\}$, $H_2 = \{$переложили 1 белый и 1 черный шар$\}$, $H_3 = \{$переложили 2 черных шара$\}$. Вероятности этих гипотез вычисляются по схеме задачи 8. Для события $A = \{$из 2-й урны извлекли белый шар$\}$ условные вероятности вычисляются по классическому определению вероятности. Используя формулу Байеса (7), получаем: $P(H_1|A) = 0,2$, $P(H_2|A) = 0,6$, $P(H_3|A) = 0,2$.

56. 0,103. До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 — все три стрелка промахнутся; H_2 — попадет 1-й стрелок, 2-й и 3-й промахнутся; H_3 — попадет 2-й стрелок, 1-й и 3-й промахнутся; H_4 — попадет 3-й стрелок, 1-й и 2-й промахнутся; H_5 — 1-й и 2-й стрелки попадут, 3-й промахнется; H_6 — 1-й и 3-й попадут, 2-й промахнется; H_7 — 2-й и 3-й стрелки попадут, 1-й промахнется; H_8 — все стрелки попадут. Вероятности этих гипотез определяются по теореме умножения вероятностей для независимых событий (вычислив вероятности, проверьте, что их сумма равна 1). Условные вероятности события $A = \{$имеется только одно попадание$\}$ при данных гипотезах равны:

$$P(A|H_1) = P(A|H_5) = P(A|H_6) = P(A|H_7) = P(A|H_8) = 0;$$

$$P(A|H_2) = P(A|H_3) = P(A|H_4) = 1.$$

Используя формулу Байеса (7), получим:

$$P(H_2|A) = \frac{0,048}{0,048 + 0,128 + 0,288} = \frac{0,048}{0,464} \approx 0,103.$$

57. а) 0,307; б) 0,002. Гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 означают соответственно, что вызванный студент подготовлен отлично, хорошо, посредственно и плохо; $P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 0,3$, $P(H_3) = 0,2$, $P(H_4) = 0,1$. Для события $A = \{$вызванный студент ответил на все три вопроса$\}$ условные вероятности вычисляются по схеме задачи 8 или по теореме умножения вероятностей зависимых событий; $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = \dfrac{C_{35}^3}{C_{40}^3} \approx 0,662$, $P(A|H_3) = \dfrac{C_{25}^3}{C_{40}^3} \approx 0,233$, $P(A|H_4) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{40}^3} \approx 0,012$. По формуле Байеса (7) вычисляем $P(H_2|A)$, $P(H_4|A)$.

Раздел 1.4

64. $0,0038$. Имеет место схема Бернулли с $n = 8$; $p = 0,25$; $q = 1 - 0,25 = 0,75$; $m = 6$. Найдите $P_8(6)$ по формуле (8).

65. $0,05792$. Имеет место схема Бернулли с $n = 5$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. $P_5(m \geqslant 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$; примените формулу Бернулли.

66. $0,34464$. $n = 6$; $p = 0,2$ (т. к. 20% пакетов акций продаются по первоначально заявленной цене); $q = 0,8$. $P_6(m \geqslant 2) = 1 - P_6(m < 2) = 1 - (P_6(0) + P_6(1))$.

67. $0,822$. $n = 6$; $p = 0,25$; $q = 0,75$. $P_6(m \geqslant 1) = 1 - P_6(m < 1) = 1 - P_6(0) = 1 - 0,75^6$.

68. $0,21754$. Следует рассмотреть пять гипотез $H_m = \{m$ попаданий при четырех выстрелах$\}$ ($m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$). Вероятности этих гипотез вычисляются по формуле Бернулли ($n = 4$ — число выстрелов; $p = 0,1$ — вероятность попадания при одном выстреле): $P(H_m) = P_4(m) = C_4^m \cdot 0,1^m \cdot 0,9^{4-m}$. По условию $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0,6$, $P(A|H_2) = 0,8$, $P(A|H_3) = 1$, $P(A|H_4) = 1$. Для вычисления $P(A)$ примените формулу полной вероятности.

69. $0,4938$. Имеем последовательность независимых испытаний — схему Бернулли с $n = 900$ (n велико); $p = 0,2$ (p не очень мало). При больших n используются приближенные формулы Пуассона (если p очень мало) и Муавра – Лапласа (если p не очень мало). Поскольку нужно определить вероятность того, что число m зерен ржи удовлетворяет неравенству $180 \leqslant m \leqslant 210$, то используется интегральная формула Муавра – Лапласа (11).

70. $0,000158$. $n = 50$ (число проверяемых изделий); $p = \dfrac{100}{10\,000} = 0,01$ (вероятность брака); $m = 5$. Поскольку объем партии велик (10 000 изделий), можно считать, что дефектность каждого из 50 изделий не зависит от качества остальных изделий. Поэтому можно считать, что имеет место схема Бернулли. Поскольку $n = 50$ велико, $p = 0,01$ мало, $a = np = 50 \cdot 0,01 = 0,5 < 10$, вычислите $P_{50}(5)$ по формуле Пуассона (9).

71. $0,0616$. $n = 1000$ — велико, вероятность $0,9996$ близка к 1, поэтому в явном виде нельзя применить ни формулу Пуассона, ни формулу Муавра – Лапласа. Рассмотрим событие $A = \{$изделие **не** выдержит испытания$\}$, тогда вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,0004 = p$ очень мала и можно использовать формулу Пуассона; $a = np = 1000 \cdot 0,0004 = 0,4$. $P_{1000}(m \geqslant 2) = 1 - P_{1000}(m < 2) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1))$.

72. а) $0,0114$; б) $0,8962$. Имеем схему Бернулли с $n = 1000$ (n велико); $p = 0,5$ (p не мало). Поэтому используем в случае а) локальную, а в случае б) интегральную формулы Муавра – Лапласа.

73. 299. Примените формулу (13).

74. $1099 \leqslant n \leqslant 1119$. Используйте формулу (12).

75. $m_0 = 40$; $P_{50}(40) \approx 0,141$. Найдите наивероятнейшее число m_0 взошедших семян по формуле (12). Для вычисления вероятности $P_{50}(40)$ используйте локальную формулу Муавра – Лапласа (10).

Раздел 2.2

81. $P(\xi = 3) = 0,2$; $P(\xi = 7) = 0$; $P(\xi < M\xi) = 0,4$; $\sigma_\xi \approx 1,14$. Поскольку среди возможных значений СВ ξ нет значения 7, то $P(\xi = 7) = 0$. Математическое ожидание $M\xi$ вычисляется по формуле (15). Т. к. $M\xi = 1,9$, то $P(\xi < M\xi) = P(\xi < 1,9) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1)$ (данному неравенству удовлетворяют только два значения СВ ξ — значения 0 и 1). Найдите $D\xi$ по формуле (16); $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

82. $p = 0,5$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -3, \\ 0,3 & \text{при } -3 < x \leqslant 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

Значение p определяется из условия нормировки (14). Функция распределения $F(x)$ терпит разрывы в точках -3, 1 и 2, отвечающих возможным значениям СВ ξ. Величина скачка в точке равна вероятности соответствующего значения.

83.

ξ	1	2	4
P	0,3	0,4	0,3

$M\xi = 2,3$; $D\xi = 1,41$; $\sigma_\xi \approx 1,19$. Задача нахождения ряда распределения по функции распределения является обратной к задаче 82. Для дискретной СВ $M\xi$ и $D\xi$ определяются по формулам (15) и (16).

84.

ξ	3	4
P	0,8	0, 2

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 3, \\ 0,8 & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$

Поскольку $M(\xi^2) = D\xi + (M\xi)^2 = 10,4$, для определения x_1 и x_2 получим систему $\begin{cases} M\xi = 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2, \\ M(\xi^2) = 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 = 10,4. \end{cases}$

Необходимо выбрать то решение $(x_1; x_2)$ системы, которое удовлетворяет условию $x_1 < x_2$.

85.

ξ	0	1	2
P	0,81	0,18	0, 01

$M\xi = 0,2$; $D\xi = 0,18$; $\sigma_\xi \approx 0,42$; $P(\xi = M\xi) = 0$; $P(\xi < M\xi) = 0,81$. СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2$ (2 детали) и $p = 0,1$ (вероятность того, что взятая наудачу деталь нестандартна); числовые характеристики можно найти по формуле (17): $M\xi = np$, $D\xi = npq$.

86.

ξ	0	1	2
P	5/18	5/9	1/6

$P(\xi \leqslant 1) = \dfrac{5}{6}$. Вероятности возможных значений равны $P(\xi = 0) = \dfrac{C_4^0 \cdot C_5^2}{C_9^2}$; $P(\xi = 1) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2}$; $P(\xi = 2) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_5^0}{C_9^2}$. Для вычисления вероятностей можно использовать также теоремы сложения и умножения.

87. $M\xi = 0,6$; $P(\xi = 1) = \dfrac{7}{15}$; $P(\xi = 4) = 0$; $P(1 \leqslant \xi \leqslant 4) = \dfrac{8}{15}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{7}{15} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{14}{15} & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

При составлении ряда распределения используйте схему задачи 8.

88.

ξ	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

$P(\xi \geqslant 2) = 0,8$. СВ ξ не может принимать значение 0, т. к. событие $\{\xi = 0\}$ означает, что среди вынутых шаров 0 красных, следовательно, вынуто 3 шара другого цвета из урны, в которой таких шаров только 2. Это невозможное событие.

89.

ξ	0	1	2
P	2/3	4/15	1/15

$P(\xi \geqslant 2) = \dfrac{1}{15}$. Событие $\{\xi = 0\}$ означает, что при первой попытке вынули красный шар. СВ ξ принимает значение 1, если первый раз вынули черный шар, а второй раз — красный; СВ ξ принимает значение 2, если два раза вынули черный шар, а третий раз — красный.

90.

ξ	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,216

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0,4 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,64 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,784 & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$P(\xi \geqslant M\xi) = 0,36$; $P(\xi = M\xi) = 0$; $P(\xi = 0,4) = 0$. Ряд распределения составляется аналогично задаче 78. Событие $\{\xi = 4\}$ означает, что первые три попытки оказались неудачными, поэтому $P(\xi = 4) = 0,6^3$. $P(\xi \geqslant M\xi) = P(\xi \geqslant 2,176) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4)$. События $\{\xi = M\xi\} = \{\xi = 2,176\}$ и $\{\xi = 0,4\}$ являются невозможными.

91. $M\xi = 2,3$. СВ ξ принимает значение 0, если студент не сдаст ни одного экзамена, поэтому $P(\xi = 0) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,008$; СВ ξ принимает значение 1, если студент сдаст только один экзамен (либо только первый, либо только второй, либо только третий), т. е. $P(\xi = 1) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,116$. Аналогично $P(\xi = 2) = 0,444$; $P(\xi = 3) = 0,432$.

92.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

$M\xi = 1,6$; $D\xi = 0,96$; $\sigma_\xi \approx 0,98$; $P(2 < \xi \leqslant 4) = 0,1792$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0,1296 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,4752 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,8208 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,9744 & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

СВ ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Она имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ (4 броска) и $p = 0,4$ (вероятность попадания при каждом). Поэтому вероятности $p_m = P(\xi = m)$ вычисляются по формуле Бернулли $P(\xi = m) = C_4^m \cdot 0,4^m \cdot 0,6^{4-m}$ ($m =$ 0, 1, 2, 3, 4). Чтобы найти $P(2 < \xi \leqslant 4)$, выберем те значения СВ, которые удовлетворяют указанному неравенству, т. е. попадают в промежуток $(2; 4]$: $P(2 < \xi \leqslant 4) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4)$.

93. $M\xi = 2$; $D\xi = 1,6$; $\sigma_\xi \approx 1,26$. СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$ (количество кредитов) и $p = 0,2$ (вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок). Числовые характеристики можно найти по формуле (17).

94. $M\xi = 0,5$; $D\xi = 0,45$; средний размер выигрыша 5 тыс. рублей; $P(\xi > 3) = 0,00046$. СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ (количество покупок) и $p = 0,1$ (т. к. выигрышной является каждая десятая единица товара). Следовательно, $M\xi = np$; $D\xi = npq$. СВ η — размер выигрыша — удовлетворяет соотношению $\eta = 10\xi$ тыс. рублей, поэтому $M\eta = 10M\xi$ тыс. рублей. Вероятность выиграть более 30 тыс. рублей равна $P(\eta > 30) = P(\xi > 3) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = C_5^4 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^1 + C_5^5 \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^0$.

95. $3,22$. Вероятность появления одного очка на грани одной кости равна $\frac{1}{6}$, а вероятность непоявления $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. По формуле Бернулли (8) $p = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$. СВ ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 20$ и p; $M\xi = np$.

96. $P(\xi_{100} \geqslant 1) \approx 0,0952$. СВ ξ_t имеет распределение Пуассона с параметром $a_t = at$, где a — среднее число ламп, выходящих из строя за один час. Т. к. $M\xi_{10\,000} = 10$, то $M\xi_{100} = 0,1$.

97. $P(\xi_1 \geqslant 3) \approx 0,001148$. СВ ξ_t имеет распределение Пуассона с параметром $a_t = at$, где a — среднее число микробов в 1 дм^3 почвы. Т. к. 1 м^3=1000 дм^3, то $M\xi_{1000} = 200$ и $M\xi_1 = 0,2$. Следовательно, $P(\xi_1 \geqslant 3) = 1 - (P(\xi_1 = 0) + P(\xi_1 = 1) + P(\xi_1 = 2))$.

98. $M\xi = 5,6$. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок промахнется (не попадет ни в девятку, ни в десятку), равна $1 - 0,1 - 0,2 = 0,7$. СВ ξ принимает значение 0, если стрелок промахнется оба раза, т. е. $P(\xi = 0) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$; ξ принимает значение 9, если при одном выстреле стрелок попадет в девятку, а при другом промахнется, т. е. $P(\xi = 9) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,28$. Аналогично получим $P(\xi = 10) = 0,14$; $P(\xi = 18) = 0,04$; $P(\xi = 19) = 0,04$; $P(\xi = 20) = 0,01$.

99.

ξ	1	2	3	...	m	...
P	0,2	0,16	0,128	...	$0,8^{m-1} \cdot 0,2$	...

Наиболее вероятное значение 1, т. к. $P(\xi = 1) = 0,2 > P(\xi = m) = 0,2 \cdot 0,8^{m-1}$. Ряд распределения составляется аналогично задаче 78, разница лишь в том, что СВ ξ принимает не конечное, а счетное число значений.

100.

ξ	1	2	3	...
P	0,79	0,1659	0,034839	...

η	0	1	2	...
P	0,3	0,553	0,11613	...

Если попадание происходит при первом выстреле, то СВ ξ принимает значение 1, а η — 0; если происходит попадание при втором выстреле, то обе СВ принимают значение 1; в случае попадания при третьем выстреле ξ принимает значение 2, а η — 1; если происходит попадание при четвертом выстреле, то обе СВ принимают значение 2 и т. д. Следовательно, событие $\{\xi = 1\}$ означает, что первый стрелок попал с первого раза либо первый не попал при первом выстреле, а второй попал, т. е. $P(\xi = 1) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,79$. Событие $\{\xi = 2\}$ происходит в двух случаях: либо первый стрелок попал со второго раза, либо второй стрелок попал со второго раза (при этом первый раз оба промахнулись), поэтому $P(\xi = 2) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot (0,3 + 0,7 \cdot 0,7) = 0,1659$. Аналогично $P(\xi = 3) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot (0,3 + 0,7 \cdot 0,7) = 0,034839$; $P(\eta = 0) = 0,3$; $P(\eta = 1) = 0,7 \cdot (0,7 + 0,3 \cdot 0,3) = 0,553$; $P(\eta = 2) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot (0,7 + 0,3 \cdot 0,3) = 0,11613$.

Раздел 2.3

106. $P(\xi < 1) = 1$; $P(0,25 < \xi \leqslant 0,75) = 0,375$; $P(\xi > 0,75) = 0$; $P(\xi = 0,25) = 0$. Используйте формулу (19). Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, поэтому $P(\xi = 0,25) = 0$. Вероятность $P(0,25 < \xi \leqslant 0,75) = \int\limits_{0,25}^{0,75} p(x)dx$ выражает площадь под графиком плотности $p(x)$ на промежутке $(0,25; 0,75]$.

107. $P(\xi < -1) = 0,25$; $P(-0,25 < \xi \leqslant 0,5) = 0,1875$; $P(\xi > 0,5) = 0,375$; $P(\xi = -0,25) = 0$. Используйте определение функции распределения и формулу (18); $P(\xi < -1) = F(-1)$.

108. $M\xi = -\dfrac{5}{6}$; $D\xi = \dfrac{11}{36}$; $P(\xi > 0,5M\xi) \approx 0,291$. Используйте формулы (20), (16), (19).

109. $M\xi = \dfrac{5}{12}$; $D\xi = \dfrac{11}{144}$; $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) \approx 0,599$. Для вычисления числовых характеристик необходимо найти плотность распределения $p(x) = F'(x)$. Для вычисления вероятности $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi) =$ $= P\left(\left|\xi - \frac{5}{12}\right| < \frac{\sqrt{11}}{12}\right) = P\left(\frac{5-\sqrt{11}}{12} < \xi < \frac{5+\sqrt{11}}{12}\right)$ используйте формулу (18).

110. $a = \frac{1}{3}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -1, \\ \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}, & \text{если } -1 < x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{5}{6}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Найдите a из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Определите функцию распределения по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$, рассмотрев отдельно случаи $x \leqslant -1$; $-1 < x \leqslant 0$; $0 < x \leqslant 1$; $x > 1$.

111. $a = \frac{1}{\mathrm{e}^4 - 1}$; $P(\xi < 1) = \frac{1}{\mathrm{e}^2 + 1} \approx 0{,}119$; $P(0{,}5 < \xi \leqslant 1) =$ $= \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}+1)(\mathrm{e}^2+1)} \approx 0{,}087$. Определите параметр a из условия $F(2-0) =$ $= a(\mathrm{e}^4 - 1) = F(2+0) = 1$. Используя определение функции распределения и формулу (18), найдите $P(\xi < 1) = F(1)$; $P(0{,}5 < \xi \leqslant 1) =$ $= F(1) - F(0{,}5)$.

112. $M\xi = 5$; $D\xi = \frac{4}{3}$; $\sigma_\xi \approx 1{,}15$; $P(4 < \xi \leqslant 6) = 0{,}5$; $P(6 \leqslant \xi \leqslant 10) = 0{,}25$; $P(\xi = 7) = 0$. Вычислите вероятности по формуле (18), воспользовавшись видом функции равномерного распределения, или по формуле (19). Заметьте, что значения 4 и 6 принадлежат отрезку $[3; 7]$, а $10 > 7$.

113. $P(\xi < 1) \approx 0{,}211$; $P(4 < \xi \leqslant 7) \approx 0{,}356$. Используйте формулы $M\xi = \frac{a+b}{2}$, $\sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Отсюда $b = 3 + 2\sqrt{3}$, $a = 3 - 2\sqrt{3}$. Вычислите вероятности по формуле (18), воспользовавшись видом функции равномерного распределения, или по формуле (19). Заметьте, что значения 1 и 4 принадлежат отрезку $[a; b]$, а $7 > b$.

114. $0{,}4$. СВ ξ распределена равномерно на $[-0{,}5$ см; 0,5 см$)$. Вычислите вероятность $P(|\xi| > 0{,}3) = 1 - P(|\xi| \leqslant 0{,}3) = 1 - P(-0{,}3 \leqslant \xi \leqslant 0{,}3)$ по формуле (18), воспользовавшись видом функции равномерного распределения, или по формуле (19).

115. $P(\xi \geqslant 20) \approx 0{,}264$. Среднее время ремонта равно $M\xi = \frac{1}{\lambda}$. Вычислите вероятность $P(\xi \geqslant 20) = 1 - F(20)$, воспользовавшись видом функции показательного распределения (22).

116. а) $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{80}\,\mathrm{e}^{-x/80} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x/80} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

б) $0,287$. Среднее время безотказной работы прибора равно $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$. Вычислите вероятность $P(\xi > 100) = 1 - F(100)$, воспользовавшись видом функции показательного распределения (22).

117. $3,13\%$. ξ распределена равномерно на $[0,495$ см; $0{,}505$ см$]$. Масса шарика радиуса ξ равна $m = \rho V = 7,8 \cdot \dfrac{4}{3}\pi\xi^3$ г. Масса будет $m > 4,2$ г, если $\xi > R_0 = \sqrt[3]{\dfrac{4,2 \cdot 3}{4\pi \cdot 7,8}}$. Вычислите вероятность $P(\xi > R_0) \approx 0,0313$.

118. $\dfrac{1}{3}$. ξ распределена равномерно на $[0°; 180°]$. Расстояние x между остриями ножек циркуля равно основанию равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см и углом при вершине ξ, поэтому $x = 20\sin\dfrac{\xi}{2}$. Расстояние $x < 10$ см, если $\xi < 60°$.

Раздел 2.4

122. $p(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$; $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$. Параметры нормального распределения $a = M\xi = 2$; $\sigma = \sqrt{D\xi} = 3$.

123. $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}$; $M\xi = 5$; $D\xi = 4$; $\sigma_\xi = 2$; $P(|\xi - M\xi| \leqslant 1,5) = 2\Phi\left(\dfrac{1,5}{2}\right) = 2\Phi\left(0,75\right) \approx 0,5468$.

124. $P(15 < \xi < 25) \approx 0,6826$; $p(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{50}}$. Используйте формулу (24). График плотности распределения лежит выше оси Ox; симметричен относительно прямой $x = 20$; имеет максимум $p(20) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}$ при $x = 20$; точки перегиба $\left(15; \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)$, $\left(25; \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)$; кривая приближается к оси Ox при $x \to \pm\infty$ (сравните с рис. 20).

125. $0,8185$.

126. $P(170 \leqslant \xi < 176) \approx 0,383$, $P(176 \leqslant \xi < 182) \approx 0,2417$, т. е. костюмов 3-го и 4-го роста должно быть примерно 38% и 24% соответственно.

127. 6%. $M\xi = 0$; поскольку $3\sigma = 20\%$, то $\sigma \approx 6,7\%$. Вероятность $P(0\% \leqslant \xi \leqslant 1\%)$ вычисляется по формуле (24).

128. $0,9065$. СВ $\xi \in \mathcal{N}(5; 6)$; вероятность $p = P(-15 \leqslant \xi \leqslant 15)$ вычисляется по формуле (24). Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей независимых событий равна p^2.

129. 8. СВ ξ — ошибка измерения — имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$ м, $\sigma = 15$ м. Вероятность $p = P(|\xi| \leqslant 5) \approx 2\Phi\,(0,33) \approx 0,2586$. Вероятность противоположного события $q = P(|\xi| > 5) \approx 1 - 0,2586 = 0,7414$. Пусть $B =\{$ошибка хотя бы одного из n измерений не превосходит по абсолютной величине 5 м$\}$, тогда $\overline{B} =\{$в каждом из n независимых измерений ошибка превосходит по абсолютной величине 5 м$\}$; $P(\overline{B}) = q^n$. По условию $P(B) = 1 - q^n \geqslant 0,9$, откуда $n \geqslant \log_{0,7414} 0,1 = \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,7414} \approx 7,7$. См. также формулу (13).

130. 50 мм. По условию $M\xi = 0$; $P(|\xi - M\xi| \leqslant 27) = 2\Phi\left(\dfrac{27}{\sigma}\right) \geqslant 0,41$. Отсюда $\Phi\left(\dfrac{27}{\sigma}\right) \geqslant 0,205$. По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) определяем: если $\Phi\,(x) \approx 0,205$, то $x = \dfrac{27}{\sigma} \approx 0,54$.

131. $M\xi = a \approx 98$ ден. ед., $D\xi = \sigma^2 \approx 138,4$ ден. ед.^{2}. По условию $0,2 = P(\xi < 88) = \Phi\left(\dfrac{88-a}{\sigma}\right) + 0,5$ и $0,75 = P(\xi > 90) = 0,5 - \Phi\left(\dfrac{90-a}{\sigma}\right)$, откуда $\dfrac{88-a}{\sigma} \approx -0,84$; $\dfrac{90-a}{\sigma} \approx -0,67$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,4	0,1554	0,8	0,2881	1,2	0,3849	1,6	0,4452
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888	1,62	0,4474
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545
0,1	0,0398	0,5	0,1915	0,9	0,3159	1,3	0,4032	1,7	0,4554
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633
0,2	0,0793	0,6	0,2257	1	0,3413	1,4	0,4192	1,8	0,4641
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706
0,3	0,1179	0,7	0,2580	1,1	0,3643	1,5	0,4332	1,9	0,4713
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2	0,4772	2,3	0,4893	2,6	0,4953	2,9	0,4981	3,2	0,499313
2,01	0,4778	2,31	0,4896	2,61	0,4955	2,91	0,4982	3,21	0,499336
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982	3,22	0,499359
2,03	0,4788	2,33	0,4901	2,63	0,4957	2,93	0,4983	3,23	0,499381
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984	3,24	0,499402
2,05	0,4798	2,35	0,4906	2,65	0,4960	2,95	0,4984	3,25	0,499423
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985	3,26	0,499443
2,07	0,4808	2,37	0,4911	2,67	0,4962	2,97	0,4985	3,27	0,499462
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986	3,28	0,499481
2,09	0,4817	2,39	0,4916	2,69	0,4964	2,99	0,4986	3,29	0,499499
2,1	0,4821	2,4	0,4918	2,7	0,4965	3	0,4987	3,3	0,499517
2,11	0,4826	2,41	0,4920	2,71	0,4966	3,01	0,4987	3,31	0,499533
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,02	0,4987	3,32	0,499550
2,13	0,4834	2,43	0,4925	2,73	0,4968	3,03	0,4988	3,33	0,499566
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,04	0,4988	3,34	0,499581
2,15	0,4842	2,45	0,4929	2,75	0,4970	3,05	0,4989	3,35	0,499596
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,06	0,4989	3,36	0,499610
2,17	0,4850	2,47	0,4932	2,77	0,4972	3,07	0,4989	3,37	0,499624
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,08	0,4990	3,38	0,499638
2,19	0,4857	2,49	0,4936	2,79	0,4974	3,09	0,4990	3,39	0,499650
2,2	0,4861	2,5	0,4938	2,8	0,4974	3,1	0,4990	3,4	0,499663
2,21	0,4864	2,51	0,4940	2,81	0,4975	3,11	0,4991	3,5	0,499767
2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	3,12	0,4991	3,6	0,499841
2,23	0,4871	2,53	0,4943	2,83	0,4977	3,13	0,4991	3,7	0,499892
2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	3,14	0,4992	3,8	0,499928
2,25	0,4878	2,55	0,4946	2,85	0,4978	3,15	0,4992	3,9	0,499952
2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979	3,16	0,4992	4	0,499968
2,27	0,4884	2,57	0,4949	2,87	0,4979	3,17	0,4992	4,5	0,499997
2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980	3,18	0,4993	5	0,4999997
2,29	0,4890	2,59	0,4952	2,89	0,4981	3,19	0,4993	$x > 5$	0,5

ЛИТЕРАТУРА

1. Алещенко Л. Н., Кончиц Р. М. Теория вероятностей: Методическое пособие для студентов всех специальностей. — Мн.: БГТУ, 1998. — 57 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 1999. — 576 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2004. — 480 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001. — 400 с.
5. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — Мн.: Вышэйшая школа, 1984. — 223 с.
6. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 543 с.
6. Мацкевич И. П., Свирид Г. П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Вышэйшая школа, 1993. — 269 с.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 256 с.
8. Устинов М. Д., Воробьева А. П. Теория вероятностей. Ч. I. — Мн.: БТИ им. С.М. Кирова, 1982. — 75 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Блинова Елена Ивановна
Марченко Владимир Матвеевич
Можей Наталья Павловна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Редактор Р.М. Рябая.

Подписано в печать 28.10.2005. Формат $60\times84\frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,1. Уч.-изд. л. 7,2.
Тираж 500 экз. Заказ .

Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет». 220050. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.