УДК 681.325.3

Д. В. Шиман, ассистент; Д. М. Романенко, ст. преподаватель, канд. техн. наук

СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАТИВНЫХ КОДОВ С ДВОЙНЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ПРОВЕРКАМИ

The article are considered the results of the synthesis new types of iterative codes: line two-dimensional iterative codes with double diagonal parities and full check matrix with minimal distance $d = 6$, which can correct two mistakes and detect all mistakes up to 3 multiplicity; line two-dimensional iterative codes with double diagonal parities and sectional check matrix, characterized with error corrections up to 2 multiplicity ($d = 5$). Main operation factors is analyzed, the efficiency of using new codes is approved. Defined, that optimal for both codes (from point of view of the minimum redundancy and parities creation time), are square check matrixes.

Введение. Современное общество, одно из ценностей которого является информация, предъявляет высокие требования к надежности ее передачи. Важным является обеспечение заданного уровня достоверности информации при передаче ее от источника к месту предназначения. Поэтому большое внимание в цифровой передаче информации уделяется корректирующим кодам. Итеративные коды играют важную роль в этой области [1, 2]. К данному классу кодов относится и линейный итеративный код с двойными диагональными проверками.

Основная часть. Проверочную матрицу линейного итеративного кода с диагональными проверками [1] можно дополнить избыточными символами, обеспечивающими проверку на четность (нечетность) вторых диагоналей (ЛИКДД). Так, например, при кодировании информационного слова X_k = **0111101000101100** с помощью таблицы с четностью по строкам, столбцам и диагоналям получим избыточные символы $X_r = X_h, X_v, X_{d1}, X_{d2}, X_s$ = *0011 1010 0011000 1111011 0.* Принципиальная схема формирования проверочных символов таким кодом представлена на рис. 1.

Рассмотрим основные параметры линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками. Пусть число информационных символов равно k. Тогда избыточность r составляет

$$r = 3(k_1 + k_2) - 1, \qquad (1)$$

где $k = k_1 k_2$. При $k_1 = k_2 = k_m$ [3]

$$r = 6k_m - 1. \qquad (2)$$

Длина кодовой последовательности равна

$$n = 3(k_1 + k_2) + k_1 k_2 - 1. \qquad (3)$$

При $k_1 = k_2 = k_m$

$$n = 6k_m + k_m^2 - 1. \qquad (4)$$

Степень кодирования определяется следующим соотношением:

$$R = \frac{k}{n} = \frac{k_1 k_2}{3(k_1 + k_2) + k_1 k_2 - 1}, \qquad (5)$$

или

$$R = \frac{k}{n} = \frac{k_m^2}{6k_m + k_m^2 - 1}, \qquad (6)$$

если $k_1 = k_2 = k_m$.

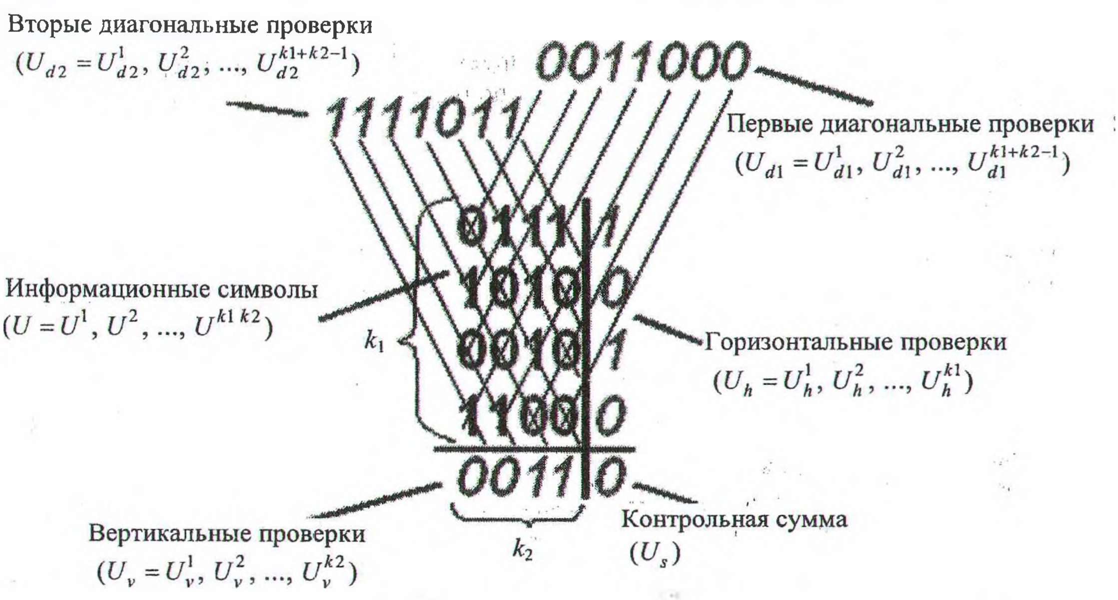

Рис. 1. Принцип формирования избыточных символов для линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками

Величина относительной избыточности равна

$$r_{\text{отн}} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n} = \frac{3(k_1 + k_2) - 1}{3(k_1 + k_2) + k_1 k_2 - 1}, \qquad (7)$$

$$r_{\text{отн}} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n} = \frac{6k_m - 1}{6k_m + k_m^2 - 1}, \qquad (8)$$

где $k_1 = k_2 = k_m$.

Порождающая матрица G размерностью $k \times n$ с единичной подматрицей I в первых k строках и столбцах для двумерного линейного итеративного кода с проверочными символами по диагоналям, в которую записывается совокупность базисных векторов, приведенных на рис. 1, будет следующей:

$$G = [P \mid I] = \left[\begin{array}{l:l}
1111000000\ 000000 & 1000000000\ 0000000000\ 000 \\
0000111100\ 000000 & 0100000000\ 0000000000\ 000 \\
0000000011\ 110000 & 0010000000\ 0000000000\ 000 \\
0000000000\ 001111 & 0001000000\ 0000000000\ 000 \\
1000100010\ 001000 & 0000100000\ 0000000000\ 000 \\
0100010001\ 000100 & 0000010000\ 0000000000\ 000 \\
0010001000\ 100010 & 0000001000\ 0000000000\ 000 \\
0001000100\ 010001 & 0000000100\ 0000000000\ 000 \\
1000000000\ 000000 & 0000000010\ 0000000000\ 000 \\
0100100000\ 000000 & 0000000001\ 0000000000\ 000 \\
0010010010\ 000000 & 0000000000\ 1000000000\ 000 \\
0001001001\ 001000 & 0000000000\ 0100000000\ 000 \\
0000000100\ 100100 & 0000000000\ 0010000000\ 000 \\
0000000000\ 010010 & 0000000000\ 0001000000\ 000 \\
0000000000\ 000001 & 0000000000\ 0000100000\ 000 \\
0000000000\ 001000 & 0000000000\ 0000010000\ 000 \\
0000000010\ 000100 & 0000000000\ 0000001000\ 000 \\
0000100001\ 000010 & 0000000000\ 0000000100\ 000 \\
1000010000\ 100001 & 0000000000\ 0000000010\ 000 \\
0100001000\ 010000 & 0000000000\ 0000000001\ 000 \\
0010000100\ 000000 & 0000000000\ 0000000000\ 100 \\
0001000000\ 000000 & 0000000000\ 0000000000\ 010 \\
1111111111\ 111111 & 0000000000\ 0000000000\ 001
\end{array}\right]$$

Одним из важных параметров кода является минимальное расстояние Хемминга между его кодовыми словами [4, 5]. Минимальное кодовое расстояние линейного итеративного кода с проверочными символами по диагоналям равно шести ($d = 6$). Доказательство данного утверждения основывается на определениях расстояния и веса Хемминга и сводится к поиску кодового слова с минимальным количеством ненулевых бит.

Для линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками (например, с $k_1 = k_2 = 4$) кодовое слово с минимальным весом будет следующим (рис. 2).

Из теоремы о минимальном кодовом расстоянии [4, 5], которая гласит, что код с минимальным расстоянием d может исправлять $[(d-1)/2]$ ошибок, если d нечетное, и код может одновременно исправлять $(d-2)/2$ и обнаруживать $d/2$ ошибок, если d четное, следует, что двумерный линейный итеративный код с двойными диагональными проверками ($d = 6$) позволяет корректировать все двукратные и обнаруживать все трехкратные ошибки.

Одним из этапов как разработки новых, так и совершенствования известных избыточных кодов является установление оптимальных размеров их проверочных матриц. Под оптимальной проверочной матрицей будем понимать проверочную матрицу с минимальной избыточностью и минимальным временем формирования проверочных символов при условии исправления ошибок максимальной кратности.

Для определения оптимальной проверочной матрицы линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками исходя из минимума избыточности воспользуемся зависимостью величины избыточности кода r от ширины проверочной матрицы k_1. При условии, что $k_1 = k/k_2$, где k – длина информационного слова, k_1, k_2 – количество строк и столбцов проверочной матрицы, величина избыточности будет равна

$$r = 3\left(k_1 + \frac{k}{k_1}\right) - 1. \qquad (9)$$

Для определения оптимального k_1 продифференцируем зависимость $r = f(k_1)$ по k_1, приравняем полученное выражение к нулю:

$$\frac{\partial r}{\partial k_1} = 3 - \frac{3k}{k_1^2}, \qquad (10)$$

$$3 - \frac{3k}{k_1^2} = 0. \qquad (11)$$

$$\underbrace{1000000000000000}_{\text{Вектор информационной последовательности}}\ \underbrace{1000}\ \underbrace{1000}_{\text{Горизонтальные и вертикальные проверки}}\ \underbrace{1000000}_{\text{Первые диагональные проверки}}\ \underbrace{0001000}_{\text{Вторые диагональные проверки}}\ \underbrace{1}_{\text{Контрольная сумма}}$$

Рис. 2. Кодовое слово с минимальным весом
для линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками

Решая данное уравнение, получим, что минимум величины избыточности достигается при $k = k_1^2$. Следовательно, квадратная матрица является оптимальной с точки зрения избыточности для линейного итеративного кода с проверочными символами по двум диагоналям. В случае если невозможно сформировать квадратную проверочную матрицу, то необходимо воспользоваться матрицей, близкой к квадратной. При этом величины k_1 и k_2 будут равны 2^m, где m – натуральное число. Например, при $k = 128$ необходимо пользоваться матрицей 8×16.

Время формирования проверочных символов, которое будет выражать в количестве операций суммирования по модулю два, необходимых для формирования проверочных символов, найдем на основе следующей зависимости (последовательная схема расчета):

$$n_{\text{ликдд}} = (k_1 - 1)k_2 + (k_2 - 1)(k_1 + 1) + 2n_d, \quad (12)$$

где $(k_1 - 1)k_2$ – количество операций суммирования по модулю два для формирования горизонтальных проверок; $(k_2 - 1)(k_1 + 1)$ – количество операций суммирования по модулю два для формирования вертикальных проверок и контрольной суммы; n_d – количество операций суммирования по модулю два для формирования первых и вторых диагоналей (n_d является функцией, зависящей от k_1 и k_2; $n_d = f(k_1, k_2)$).

Если $k_1 = k_2 = k_m$, то

$$n_{\text{ликдд}} = (k_m - 1)(2k_m + 1) = $$
$$= 2k_m^2 - k_m - 1 + 2n_d, \quad (13)$$

$$n_d = k_m - 1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{k_m - 1} i - 1 + 2. \quad (14)$$

Ввиду сложности дифференцирования аналитической зависимости (13) для определения оптимальных проверочных матриц с точки зрения времени формирования всех проверочных символов была разработана программа (на языке Delphi), которая показала, что минимум операций суммирования по модулю два достигается при $k_1 = k_2 = k_m$.

Таким образом, для линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками как с точки зрения минимума избыточности, так и с точки зрения минимума времени формирования проверочных символов оптимальными являются квадратные проверочные матрицы.

Отметим, что особенностью данного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками является увеличение кратности исправляемых и обнаруживаемых ошибок по сравнению с известными двумерными линейными итеративными кодами за счет роста избыточности при неизменном времени формирования проверочных символов.

Разновидностью линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками является усеченный двумерный линейный итеративный код с двойными диагональными проверками.

В проверочной матрице усеченного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками исключается паритет паритетов (один проверочный бит X_s). Так, например, при кодировании информационного слова X_k = **0111101000101100** с помощью таблицы с четностью по строкам, столбцам и диагоналям получим избыточные символы $X_r = X_h$, X_v, X_{d1}, X_{d2}, X_s = *0011 1010 0011000 1111011* как показано на рис. 3.

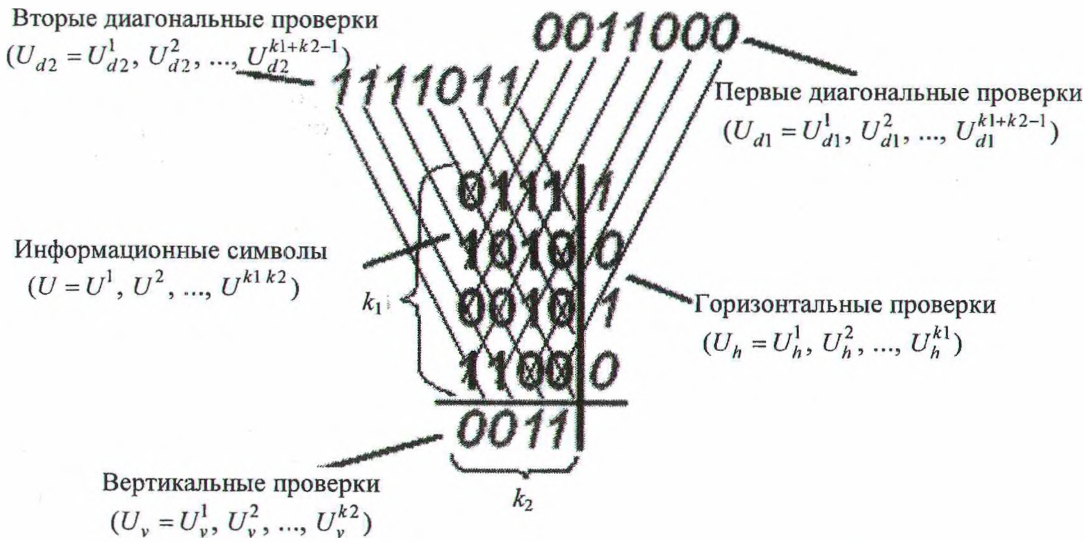

Рис. 3. Принцип формирования избыточных символов
для усеченного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками

Порождающая матрица G для усеченного двумерного линейного итеративного кода с проверочными символами по диагоналям, приведенная на рис. 3, будет выглядеть следующим образом:

$$G = [P \mid I] = \left[\begin{array}{c|c}
1111000000\ 000000 & 1000000000\ 0000000000\ 00 \\
0000111100\ 000000 & 0100000000\ 0000000000\ 00 \\
0000000011\ 110000 & 0010000000\ 0000000000\ 00 \\
0000000000\ 001111 & 0001000000\ 0000000000\ 00 \\
1000100010\ 001000 & 0000100000\ 0000000000\ 00 \\
0100010001\ 000100 & 0000010000\ 0000000000\ 00 \\
0010001000\ 100010 & 0000001000\ 0000000000\ 00 \\
0001000100\ 010001 & 0000000100\ 0000000000\ 00 \\
1000000000\ 000000 & 0000000010\ 0000000000\ 00 \\
0100100000\ 000000 & 0000000001\ 0000000000\ 00 \\
0010010010\ 000000 & 0000000000\ 1000000000\ 00 \\
0001001001\ 001000 & 0000000000\ 0100000000\ 00 \\
0000000100\ 100100 & 0000000000\ 0010000000\ 00 \\
0000000000\ 010010 & 0000000000\ 0001000000\ 00 \\
0000000000\ 000001 & 0000000000\ 0000100000\ 00 \\
0000000000\ 001000 & 0000000000\ 0000010000\ 00 \\
0000000010\ 000100 & 0000000000\ 0000001000\ 00 \\
0000100001\ 000010 & 0000000000\ 0000000100\ 00 \\
0100001000\ 010000 & 0000000000\ 0000000010\ 00 \\
0100001000\ 010000 & 0000000000\ 0000000001\ 00 \\
0010000100\ 000000 & 0000000000\ 0000000000\ 10 \\
0001000000\ 000000 & 0000000000\ 0000000000\ 01
\end{array}\right]$$

Для усеченного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками минимальное кодовое расстояние равно пяти ($d = 5$). Следовательно, данный код может обнаруживать и исправлять все ошибки, кратность которых не превышает двух.

Оптимальной проверочной матрицей, как и для линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками, является квадратная проверочная матрица.

Заключение. Подводя итоги работы, можно отметить, что:

1. Разработана и исследована конструкция нового двумерного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками с минимальным кодовым расстоянием $d = 6$, что позволяет корректировать все двойные и обнаруживать все тройные ошибки; описаны его свойства, доказано, что оптимальной (с точки зрения минимума избыточности и времени формирования дополнительных символов) является квадратная ($k_1 = k_2 = k_m$) проверочная матрица.

2. Разработана и исследована конструкция усеченного двумерного линейного итеративного кода с двойными диагональными проверками, минимальное кодовое расстояние которого равно пяти ($d = 5$), что позволяет обнаруживать и корректировать все двойные ошибки. Время формирования проверочных символов для такого кода уменьшается в 2 раза по сравнению с линейным итеративным кодом с двойными диагональными проверками, но при этом снижается кратность обнаруживаемых ошибок на единицу при неизменной кратности исправляемых ошибок.

Литература

1. Урбанович, П. П. Свойства и алгоритмы аппаратной реализации нового вида итеративных кодов для систем памяти / П. П. Урбанович, Д. М. Романенко // Новые информационные технологии: материалы третьей Междунар. конф. NITE'2000, Минск, 13–15 ноября 2000 г. / БГЭУ. – Минск, 2000. – Т. 2 – С. 159–164.

2. Романенко, Д. М. Граничные соотношения между параметрами для итеративного кода с диагональными проверками / Д. М. Романенко // Новые информационные технологии: материалы третьей Междунар. конф. NITE'2000, Минск, 10–12 декабря 2002 г. / БГЭУ. – Минск, 2002. – Т. 2. – С. 83–86.

3. Урбанович, П. П. Избыточность в полупроводниковых интегральных микросхемах памяти / П. П. Урбанович, В. Ф. Алексеев, Е. А. Верниковский. – Минск: Наука и техника, 1995. – 263 с.

4. Мак-Вильямс, Ф. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Мак-Вильямс, Н. Слоэн; пер. с англ.; под ред. Л. А. Басалыго. – М.: Связь, 1979. – 746 с.

5. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – 2-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.