УДК 519.872

О. Ф. Зирко, лаборант

ТРЕБОВАНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

The goal of this article is to introduce the complex exponent of query for development the new mathematical form of query in Queuing theory. The new complex form and general algorithm of determination of queues functions are presented in this paper. Using of this form enhances the external limited of queuing systems in Queuing theory. It was analyzed the problems and aspects of depending the new form for using in technologies. As the result of researches it was revealed that the complex exponent has been help to use the new connections of independent quantities and simplify of calculations. Complex mathematic discover the reveal priority of every objects. As new form of queues, the complex exponent focus upon queuing structures but are not restricted to them and the system's form at all. It may be deference approaches in economic and humanities, technology and science for automatic verification, control and correction. The complex exponent, its means and characteristics helped to find new methods of analyses models for effectiveness submissions in modern introductions of Queuing theory.

Введение. При построении математических моделей реальных физических процессов с помощью систем массового обслуживания часто возникают ситуации, в которых простейшие алгебраические операции с требованиями выходят за пределы ограничений, определенных теорией массового обслуживания.

Вне зависимости от типа модели характерной особенностью любых систем массового обслуживания является наличие одного или нескольких потоков однородных (абстрактных) объектов. Достаточной степенью абстракции должна обладать и модель, в которой описывается процесс обслуживания. При этом для классических систем массового обслуживания существенными являются лишь моменты появления объектов, от которых зависит эволюция модели по времени. Использование теории массового обслуживания при решении проблем теории надежности, анализе процессов функционирования сложных систем, разработке автоматизированных систем управления, применении в экономических и социальных сферах обслуживания (в транспорте, системах связи, системах снабжения, медицинском обслуживании) привело к созданию моделей нестандартных систем массового обслуживания. В настоящее время такими системами можно назвать:

1. ВМАР-системы, в которых (согласно описаниям Лукантони) время поступления и время обслуживания контролируются управляющим процессом $\{I(t), t > 0\}$; управляющий процесс определен на конечном пространстве состояний $I = \{0, 1, \ldots, W\}$.

2. Циклические системы с различными типами приоритетов (абсолютным, относительным, смешанным, чередующимся, динамическим).

3. Системы с ограничениями на суммарный объем, в которых каждое требование независимо от дисциплины обслуживания наряду со случайным временем обслуживания имеет абстрактный параметр, характеризующий исследуемый процесс (случайный объем).

Основная часть. Следуя традициям классической теории массового обслуживания, во всех перечисленных выше системах использовались только положительно определенные параметры требований. Анализ систем и их приложений показывает, что во многих моделях (особенно при рассмотрении векторов и матриц) возникают проблемы получения результатов, связанные с невозможностью разрешения тех или иных алгебраических операций в действительных числах. Решить эти проблемы можно следующим образом:

– отказаться от автоматического применения установленных методов решения, что приводит к проведению подробных исследований всех возможностей использования;

– выйти за пределы области действительных чисел.

Автором была сделана попытка выйти за пределы области действительных чисел, для чего в качестве основного показателя требования были введены вектора, выраженные в комплексной форме. Преимущество применения таких векторов состоит в том, что результаты основных математических операций над комплексными числами не выходят за рамки комплексных чисел [2], и это означает, что решение всегда находится в области введенных ограничений.

Использование комплексных векторов и функций комплексной переменной в системах массового обслуживания тесно связано с формированием новых комплексных параметров требований, построенных на основе функциональной зависимости пары независимых величин, каждое из которых может иметь свою функцию распределения и вероятность точности измерений. Учитывая, что измеряемые величины могут иметь свою размерность и абстрактность поступающих на вход требований, в определенной степени находящихся под наблюдением управляющего процесса и связанных между собой с помощью аналитической функции, параметр входного требования системы массового обслуживания $y = Y(x, z)$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{y} = u(\vec{x}_1) + iv(\vec{x}_2), \qquad (1)$$

где $u(\vec{x}_1)$ – функциональная зависимость, представляющая действительную часть требования; $v(\vec{x}_2)$ – функциональная зависимость, представляющая мнимую часть требования. Причем функциональные зависимости $u(\vec{x}_1)$ и $v(\vec{x}_2)$ определены на промежутке $]-\infty\,;\ +\infty\,[$.

При сложных расчетах необходимо помнить о том, что действительная часть требования $u(\vec{x}_1)$ в предполагаемой области является гармонической функцией [2], что означает невозможность достижения абсолютного максимума во внутренних точках этой области. Другими словами, внутри области исследования не существует точек, в которых функция возрастала (убывала) бы по всем направлениям. Для систем массового обслуживания этот недостаток можно считать несущественным, так как в большинстве задач результатом являются вероятностные характеристики случайных величин, для которых требуется анализ только по отдельным направлениям.

Процесс формирования комплексного показателя происходит при поступлении требования на вход системы массового обслуживания. Отличительной чертой этого процесса является определение приоритетов каждого из параметров, характеризующих одно требование, т. е. выделение внутреннего приоритета.

При формировании параметра выделяется приоритет одной из частей (действительной или мнимой) и порядок, в котором они поступают на обработку. В случае равных приоритетов первой на обслуживание поступает мнимая часть параметра, так как ее формирование происходит с большей скоростью. Однако действительная часть может на какое-то время прервать обслуживание мнимой части.

При представлении требования по форме (1) многие вероятностные характеристики способствуют изменению прежних граничных условий существования требования. Одной из таких характеристик является функция распределения поступившего на вход требования. Для нахождения ответа на вопрос, каким образом функция распределения комплексно определенного требования будет влиять на его границы, рассмотрим функцию распределения введенного в систему массового обслуживания требования $\vec{y} = Y(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, представленного по форме (1).

Пусть требование имеет функцию распределения $F(\vec{y}) = P\{Y < \vec{y}\}$. С одной стороны, функция распределения $F(\vec{y})$ является полной вероятностью двух независимых величин $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, каждая из которых имеет свою функцию распределения. Тогда по определению полной вероятности от двух независимых величин

$$F(\vec{y}) = F(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = P\{Y < \vec{x}_1\}P\{Y < \vec{x}_2\},$$

откуда получаем

$$F(\vec{y}) = B(\vec{x}_1)L(\vec{x}_2). \qquad (2)$$

Учитывая форму (1), предположим, что функция распределения $F(\vec{y})$ представима в виде

$$F(\vec{y}) = P\{Y < \vec{x}_1\} + iP\{Y < \vec{x}_2\} =$$

$$= B(\vec{x}_1) + iL(\vec{x}_2), \qquad (3)$$

либо

$$F(\vec{y}) = F\exp(iq), \qquad (4)$$

где F – модуль комплексной величины, определяющий степень взаимосвязи вероятностей появления независимых величин в системе в момент формирования единого требования [2]. Модуль комплексной величины рассчитывается по формуле

$$F = \left|\sqrt{(B(\vec{x}_1))^2 + (L(\vec{x}_2))^2}\right|. \qquad (5)$$

Исходя из границ составляющих модуля комплексной величины ($0 \le B(\vec{x}_1) \le 1$ и $0 \le L(\vec{x}_2) \le 1$), можно определить следующие граничные условия степени взаимосвязей:

$$0 \le F \le \sqrt{2}. \qquad (6)$$

Условие (6) свидетельствует о том, что формирование единого требования из двух независимых величин возможно тогда и только тогда, если модуль их совместной функции вероятностей попадает в интервал $[0,\ \sqrt{2}\,]$. При этом

$$\exp(iq) = F^{-1}B(\vec{x}_1)L(\vec{x}_2). \qquad (7)$$

Если между частями показателя (мнимой $\vec{x}_2$ и действительной $\vec{x}_1$) существует явная взаимосвязь, то функция распределения требования с комплексным показателем становится равной произведению функции распределения более приоритетной части и условной вероятности менее приоритетной части параметра. В этом случае исследователь сталкивается с требованиями, в которых «внутренние» параметры не идентичны между собой, а различаются по тем или иным признакам. Связь величин способствует возникновению функциональной зависимости распределений от условной вероятности. Например, если более высокий приоритет закреплен за действительной частью (что более часто применимо в реальности), то формулы (2), (5) и (7) примут вид

$$F(\vec{y}) = B(\vec{x}_1)L(\vec{x}_2 | \vec{x}_1), \qquad (8)$$

$$F = \left| \sqrt{(B(\vec{x}_1))^2 + (L(\vec{x}_2 \, | \vec{x}_1))^2} \right| , \qquad (9)$$

$$\exp(iq) = F^{-1} B(\vec{x}_1) L(\vec{x}_2 \, | \vec{x}_1) . \qquad (10)$$

Условная вероятность в формулах (8)–(10) находится в зависимости от конкретной дисциплины обслуживания. Нередко возникают ситуации, когда, несмотря на установленный приоритет, необходимо отдавать предпочтение требованиям с менее низким приоритетом [4]. В результате постоянно приходится сталкиваться со случаями, когда нужно вводить приоритетную дисциплину обслуживания для получения того или иного эффекта.

С подобными проблемами приходится сталкиваться при анализе сложных процессов, в которых комплексный показатель одного требования зависит от n-го количества величин ($n > 2$). При формировании требования с комплексным показателем предполагается, что в самой структуре на входе системы не должны происходить существенные изменения, однако из общего количества параметров исследователю необходимо выделять две подгруппы, одна из которых будет относиться к действительной части показателя, а другая – к мнимой. Количество параметров в каждой из подгрупп может не оказывать влияния на конечный результат, поэтому оно может быть не одинаковым. Однако вопросы приоритетного обслуживания не могут не волновать исследователей. Основными на данном этапе составления модели являются следующие задачи:

– определение приоритета среди подгрупп;

– выявление точных функциональных зависимостей внутри каждой из подгрупп.

Необходимо заметить, что при отсутствии функциональных зависимостей следует оценить значимость данного параметра в рассматриваемом процессе и его степень влияния на данную подгруппу. На первый взгляд может показаться, что увеличение числа величин внутри показателя и форма (1) представления требования с комплексным показателем только усложнят расчеты.

Безусловно, проще «пренебречь» величинами, которые с нашей точки зрения не оказывают явного влияния. Однако практика показывает, что исключая взаимосвязи, мы увеличиваем погрешности, а следовательно, не достигаем необходимого результата. Кроме того, в большинстве случаев функциональную зависимость, характеризующую реальный процесс, практически всегда можно выявить, исследуя свойства самих величин. Таким образом, увеличение числа величин внутри комплексного показателя помогает выявлять взаимосвязи параметров внутри одного требования, а значит, внутри анализируемой модели.

Процесс требований с внутренними приоритетами будет являться немарковским (за исключением случая, когда распределение параметров одного или более классов неэкспоненциально). Анализ таких процессов, очевидно, более труден, так как показатель состояния является многомерным вектором [4], содержащим информацию о каждом классе. Представление (1) дает возможность рассматривать одно требование в комплексе взаимосвязей, а время обслуживания одного требования связать с циклом обслуживания. В силу многомерности процесса на периоде занятости было бы трудно изучать аналитические модели. Однако поскольку каждое требование является очередным циклом обслуживания, то исследование процесса с приоритетами сводится к рассмотрению процесса на цикле обслуживания, который, по существу, обрабатывается проще, чем исходный процесс.

Математический аппарат для анализа моделей на цикле обслуживания, в которых потоки требований имеют внутренний приоритет, требует рассмотрения функций эффективности и пересмотра методов алгебраических расчетов.

Например, при исследовании систем массового обслуживания часто применяют преобразование Лапласа – Стильтьеса, под которым, по определению [3], понимают функцию случайной величины y:

$$\alpha(q) = \mathrm{M}e^{-qy} = e^{-qt} dB(t) , \qquad (11)$$

где q – комплексная переменная; $\mathrm{M}e^{-qy}$ – математическое ожидание величины e^{-qy}; $B(t)$ – функция распределения случайной величины y.

Однако преобразование Лапласа – Стильтьеса выгодно использовать только для анализа положительно определенных величин. При рассмотрении сложных взаимосвязей и при расширении границ применения преобразование Лапласа – Стильтьеса становится не применимым вообще.

В этом случае при составлении модели проще использовать средства теории комплексных чисел [2], например, теорию вычетов или изображений. Для расчета даже таких характеристик, как период занятости, результат можно получить, основываясь на лемме Жордана, согласно которой в верхней полуплоскости существует аналитическая функция $f(\vec{y})$ случайной величины Y, для которой $\mathrm{Im p}\, \vec{y} > 0$, а $\arg \vec{y}$ стремится к нулю при $|\vec{y}| \to \infty$. Тогда при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{|y| \to \infty} \int\limits_C e^{i\lambda Y} f(Y) dY = 0 . \qquad (12)$$

Если условия леммы соблюдены и случайная величина Y определена на всей действительной оси $-\infty < \vec{y} < +\infty$, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} f(\bar{y}) d\bar{y}$$

существует и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} f(\bar{y}) d\bar{y} = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}[e^{igz} f(z), z_k], \quad (13)$$

где z_k – особые точки плотности $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Для обработки комплексных требований в системах массового обслуживания можно рассматривать изображения заданных плотностей с помощью теоремы Миллена, согласно которой изображение задается выражением

$$f(\lambda) = (2\pi i)^{-1} \int_{\bar{x}_1 - i\infty}^{\bar{x}_1 + i\infty} e^{\lambda \bar{y}} F(\bar{y}) d\bar{y}. \quad (14)$$

При условии, что для всех действительных значений требования $\operatorname{Re} \bar{y} = u(\bar{x}_1) < \xi$ сходится интеграл

$$\int_{\bar{x}_1 - i\infty}^{\bar{x}_1 + i\infty} |F(\bar{y})| d\bar{x}_2 < M. \quad (15)$$

Представление требования в виде вектора комплексной величины $\bar{y}$ по форме (1) позволяет во многих практических задачах упрощать аналитические расчеты, описывая их с помощью специальных функций.

Одной из таких функций можно считать W-функцию Ламберта, введенную в обращение в конце 1980-х гг. R. M. Corless, G. H. Connet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey и D. E. Knuth.

По определению [1], W-функция Ламберта представляет множество действительных значений $\bar{y}$, являющихся решением функционального уравнения

$$W(\bar{y})\exp(W(\bar{y})) = \bar{y}. \quad (16)$$

Одним из этапов к разрешению дифференциальных уравнений через W-функцию Ламберта считается нахождение выражения оптимального значения y.

При рассмотрении и подборе возможных решений необходимо помнить, что W-функция Ламберта является обратной к функции $W = Y\exp Y$ [4], которая помогает установить следующие простейшие свойства:

1) функция не является ни четной, ни нечетной;

2) функция определена в интервале $[-1/e; \infty)$, где принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$;

3) для отрицательных значений Y функция двухзначна;

4) точка А с координатами $(-1/e; -1)$ делит график на две ветви: основную и нижнюю. Более подробно с функцией Ламберта можно познакомиться в работах [1, 5].

При использовании в системах массового обслуживания требований с комплексным показателем для многих расчетов удобно использовать экспоненциальную $\exp(W(Y))$ и логарифмическую $\ln(W(Y))$ функции, а также дифференциал и неопределенный интеграл W-функции, математические формулы которых просто вывести из определения самой функции (16) либо из свойств обратной функции.

В настоящее время W-функцию Ламберта применяют в основном для решения задач математической физики. Однако ее свойства показывают, что существует возможность исследования с ее помощью векторов, комплексных значений особенно в тех случаях, где встречаются экспоненты, что делает удобным использование ее при анализе систем массового обслуживания. Понимание свойств этой функции подчеркивает взаимосвязь величин, уменьшая вероятность получения неверного результата.

Заключение. Представление требований с комплексным показателем в теории массового обслуживания расширяет границы применения моделей, позволяет рассчитывать основные характеристики и проводить анализ полученных результатов. Представление требований с комплексным показателем помогает связывать независимые величины, позволяет одновременно использовать средства теории комплексных чисел, векторный и матричный анализ, что значительно упрощает проводимые вычисления. При увеличении числа параметров внутри показателя комплексное представление по форме (1) помогает выявлять взаимосвязи и определять приоритетные величины внутри требования, рассматривать требование как циклический процесс, дополняя его математическим аппаратом, что открывает новые перспективы развития в моделировании систем массового обслуживания.

Литература

1. Дубинова, И. Д. Применение W-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы / И. Д. Дубинова // Физика плазмы. – 2004. – Т. 30, № 10.

2. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М.: Наука , 1970.

3. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учеб. пособие / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003.

4. Джейсуол, Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсуол. – М.: Мир, 1973.

5. On the Lambert W function / R. M. Corless [et al.] // Adv. Comput. – Math. – 1996. – Vol. 5.