УДК 621.391.26

А. А. Дятко, доцент; С. М. Костромицкий, профессор (КБ «Радар»);
П. Н. Шумский, доцент (КБ «Радар»)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ АМПЛИТУД СИГНАЛОВ В КВАДРАТУРНЫХ КАНАЛАХ КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРА ПО ИЗВЕСТНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ЕГО ВЫХОДЕ

In article the decision of a problem on a finding of density of distribution of probabilities of amplitudes of signals in channels of the square-law detector on known density of distribution on its output is resulted.

Введение. В настоящее время при проектировании радиоэлектронных систем широкое распространение получило имитационное моделирование их работы [1]. Такое моделирование позволяет исследовать работоспособность как системы в целом, так и ее отдельных узлов при различных типах входных воздействий.

При имитационном моделировании работы радиоэлектронных измерительных систем различного назначения бывает необходимо обеспечить заданную плотность распределения амплитуд сигналов на их выходах. Такая задача возникает, например, когда требуется имитировать сигналы, принимаемые приемным устройством радиолокационной станции, отраженные от воздушных объектов различных типов. В данной статье приводится решение одной из задач подобного типа.

Основная часть. Выходным устройством упомянутых систем часто является квадратичный детектор (рисунок).

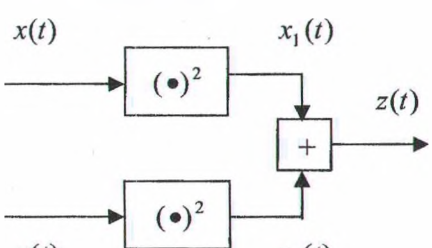

Рисунок. Функциональная схема квадратичного детектора

Из рисунка видно, что обеспечить заданную плотность распределения амплитуды сигнала $z(t)$ на его выходе можно только при определенном распределении амплитуд сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в его квадратурных каналах, поскольку они связаны нелинейной функциональной зависимостью.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – независимые случайные сигналы, имеющие одинаковую плотность распределения вероятностей амплитуд, которые можно трактовать как сигналы на выходах квадратурных каналов некоторой радиотехнической системы; $x_1(t)$ и $y_1(t)$ – сигналы на выходах квадраторов, также имеющие одинаковую плотность распределения вероятностей амплитуд. Тогда

$$x_1(t) = x^2(t), \qquad y_1(t) = y^2(t),$$

$$z(t) = x_1(t) + y_1(t) = x^2(t) + y^2(t).$$

Пусть $p_z(x)$ – плотность распределения вероятностей амплитуды сигнала $z(t)$; $p_{x_1}(x) = p_{y_1}(x) = p_1(x)$ – плотность распределения вероятностей амплитуд сигналов $x_1(t)$ и $y_1(t)$; $p_x(x) = p_y(x) = p(x)$ – плотность распределения вероятностей амплитуд сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Задача заключается в том, чтобы по виду $p_z(x)$ определить вид плотности распределения $p(x)$.

Известно [2, 3], что плотность распределения вероятностей сигнала $z(t)$ как суммы двух сигналов рассчитывается как

$$p_z(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(s) p_1(x-s) ds \tag{1}$$

и относительно неизвестной функции $p_1(x)$ представляет собой интегральное уравнение типа свертки.

Пусть $L[p_z(x)] = F_z(p)$ – преобразование Лапласа от $p_z(x)$; $L[p_1(x)] = F_1(p)$ – преобразование Лапласа от $p_1(x)$, тогда из (1) получаем

$$F_z(p) = F_1^2(p), \tag{2}$$

откуда

$$F_1(p) = \sqrt{F_z(p)} \tag{3}$$

и

$$p_1(x) = L^{-1}[F_1(p)] = L^{-1}[\sqrt{F_z(p)}], \tag{4}$$

где $L^{-1}[\bullet]$ – оператор обратного преобразования Лапласа.

Функциональное преобразование $f(x) = x^2$ является неоднозначным относительно аргумента x. Поэтому для восстановления функции $p(x)$ по известной функции $p_1(x)$ требуются некоторые предположения относительно вида $p(x)$. Рассмотрим два подхода к решению этой задачи.

Первый подход. Пусть плотность распределения вероятностей $p(x)$ является односторонней, т. е. $p(x) = 0$, при $x < 0$.

При таком предположении сигналы $x_1(t)$ и $y_1(t)$ можно рассматривать как результат преобразования сигналов $x(t)$ и $y(t)$ нелинейным элементом с характеристикой

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Преобразование (5) является однозначным, следовательно, сигналы $x(t)$ и $y(t)$ можно рассматривать как результат преобразования сигналов $x_1(t)$ и $y_1(t)$ нелинейным элементом с характеристикой

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Известно [2], что функциональный элемент с характеристикой вида

$$y = f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^\nu, & x \ge x_0, \quad \nu > 0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \qquad (7)$$

преобразует случайный процесс с плотностью вероятностей мгновенных значений $p_x(x)$ в случайный процесс с плотностью вероятностей мгновенных значений $p_y(y)$, где

$$p_y(y) = \delta(y) \int_{-\infty}^{x_0} p_x(x) dx +$$

$$+ \frac{1}{\nu} y^{-\frac{\nu-1}{\nu}} p_x\left(x_0 + y^{\frac{1}{\nu}} \right), y > 0. \qquad (8)$$

Для нашего случая $p_x(x) = p_1(x)$, $p_y(y) = p(y)$, $x_0 = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, тогда (7) и (8) приобретают вид

$$y = f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}, x > 0, \qquad (9)$$

$$p(y) = \frac{1}{\nu} y^{-\frac{\nu-1}{\nu}} p_1\left(y^{\frac{1}{\nu}} \right) = 2y p_1(y^2). \qquad (10)$$

Теперь рассмотрим конкретные случаи для плотности $p_z(x)$. Пусть

$$p_z(x) = \frac{4x}{a^2} e^{-\frac{2x}{a}}, \; x \ge 0 \qquad (11)$$

распределение Сверлинга2 [4].

Обозначим

$$\frac{2}{a} = \lambda, \qquad (12)$$

тогда

$$p_z(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \; x \ge 0. \qquad (13)$$

Используя (2)–(4), (10), получаем

$$F_1(p) = \sqrt{F_z(p)} = \frac{\lambda}{(p + \lambda)},$$

$$p_1(x) = L^{-1}[F_1(p)] = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad (14)$$

$$p(y) = 2y p_1(y^2) = 2y\lambda e^{-\lambda y^2}. \qquad (15)$$

Полагая здесь $\lambda = \frac{1}{2s^2}$ и заменяя для единообразия y на x, получаем

$$p(x) = 2x\lambda e^{-\lambda x^2} = \frac{x}{s^2} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}, x \ge 0. \qquad (16)$$

Таким образом, для (11) распределение амплитуд в квадратурных каналах (16) есть распределение Релея.

Пусть теперь

$$p_z(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} - \qquad (17)$$

распределение Сверлинга1 [4].

Обозначим $\frac{1}{a} = \lambda$, тогда

$$p_z(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \qquad (18)$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, получим

$$F_1(p) = \sqrt{F_z} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{p + \lambda}}, \qquad (19)$$

$$p_1(x) = L^{-1}[F_1(p)] = \frac{\sqrt{\lambda} e^{-\lambda x}}{\sqrt{\pi x}}, \quad x > 0, \qquad (20)$$

$$p(y) = 2y p_1(y^2) = 2y \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi y^2}} e^{-\lambda y^2} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda y^2}.$$

Полагая здесь $\lambda = \frac{1}{2s^2}$ и заменяя для единообразия y на x, получаем

$$p(x) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda x^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \quad x > 0. \qquad (21)$$

Таким образом, здесь получаем односторонний нормальный закон распределения вероятностей мгновенных значений сигнала.

Второй подход. Плотность распределения вероятностей сигнала после квадратичного преобразования $y = f(x) = x^2$ имеет вид [2]

$$p_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [p(\sqrt{y}) + p(-\sqrt{y})], \qquad (22)$$

где $p_1(y)$ – плотность вероятностей после квадратичного преобразования; $p(y)$ – плотность вероятностей до квадратичного преобразования.

Уравнение (22) является функциональным уравнением относительно неизвестной функции $p(y)$ при известной $p_1(y)$.

Предположим, что функция $p(y)$ является четной, т. е. $p(y) = p(-y)$. Тогда из (22) получаем

$$p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}[p(\sqrt{y})]. \qquad (23)$$

Так как $y = x^2$, то

$$p_1(x^2) = \frac{p(|x|)}{|x|},$$

откуда

$$p(|x|) = |x| p_1(x^2). \qquad (24)$$

Пусть $p_1(x)$ имеет вид (20)

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{\lambda} e^{-\lambda x}}{\sqrt{\pi x}}, \quad x > 0,$$

тогда

$$p(|x|) = |x| p_1(x^2) = |x| \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi x^2}} e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2}. \qquad (25)$$

Поскольку правая часть (25) есть четная функция, то можно записать

$$p(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2}. \qquad (26)$$

Полагая здесь $\lambda = \frac{1}{2s^2}$, получаем

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}. \qquad (27)$$

Таким образом, в данном случае получаем нормальный закон распределения вероятностей мгновенных значений сигнала.

Пусть $p_1(x)$ имеет вид (14)

$$p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Тогда из (25) следует, что

$$p(|x|) = |x| \lambda e^{-\lambda x^2}.$$

При $\lambda = \frac{1}{2s^2}$ получаем

$$p(|x|) = \frac{|x|}{2s^2} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}. \qquad (28)$$

В силу четности функции в правой части равенства (28) можно записать

$$p(x) = \frac{|x|}{2s^2} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \ -\infty < x < \infty. \qquad (29)$$

Плотность вероятностей (29) можно трактовать как модификацию распределения Релея для всей числовой оси.

Заключение. Таким образом, из полученных результатов следует, что на выходе квадратичного детектора можно получить случайный сигнал с плотностью вероятности мгновенных значений, соответствующей распределениям Сверлинга (11) и (17). Для этой цели в его квадратурных каналах необходимо создать сигналы с плотностью вероятности мгновенных значений, соответствующей распределению Релея (16), одностороннему нормальному закону (21), нормальному закону (27) и модифицированному закону Релея (29).

Литература

1. Быков, В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М.: Сов. радио, 1971. – 326 с.
2. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1989. – 654 с.
3. Сколник, М. Справочник по радиолокации: в 3 т. / М. Сколник; пер. с англ.; под ред. К. Н. Трофимова. – М.: Сов. радио, 1976. – Т. 1. – 456 с.
4. Заезный, А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / А. М. Заезный. – М.: Связь, 1969. – 448 с.