

Н. А. Ахраменко, доцент (БелГУТ); Л. М. Булавко, ст. преподаватель (БелГУТ);
В. Я. Матюшенко, профессор (БелГУТ)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ

Calculation intensity of the magnetic field was examined for cases when electric current disposed on the surfaces for points on the surfaces, into the surfaces (cylinder's surfaces) and out of the surfaces. Superposition magnetic field was used in the study of intensity of the magnetic field for electric current on the surfaces.

Введение. Индукцию магнитного поля системы токов можно определить, используя закон Био – Савара – Лапласа и принцип суперпозиции для магнитных полей [1–7]. В некоторых случаях (для систем, обладающих симметрией) удобно применять закон полного тока. Ток может течь вдоль линии, по поверхности или по объему, в связи с чем различают токи вдоль линии, поверхностные и объемные токи. Простейшими моделями поверхностных токов могут служить ток по цилиндрической поверхности вдоль ее оси и ток по плоскости одного направления. Рассматриваемый объект исследования (поверхностный ток) как физическая система представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. Поскольку они имеют некоторые размеры в пространстве, то возникающий ток будет локализован в оболочке некоторой толщины. При переходе от зарядов, обладающих некоторыми размерами, к точечным зарядам модель поверхностного тока, локализованного в некоторой оболочке, трансформируется в поверхностный ток (толщина поверхности равна нулю). С учетом этого под индукцией магнитного поля в точках, принадлежащих поверхности, будем понимать ее усредненное значение по толщине оболочки.

Необходимость исследования систем с поверхностными токами обуславливается в первую очередь недостаточной освещенностью закономерностей поведения индукции магнитного поля при переходе через плоскость, в которой локализован поверхностный ток. Ранее, в работах [8–10], была решена аналогичная задача по расчету напряженности электрического поля. В результате этого установлено, что напряженность электрического поля при переходе через заряженную поверхность претерпевает разрыв с включенным обособленным значением напряженности поля на поверхности. Задачи об определении напряженности электрического поля поверхностных зарядов и индукции магнитного поля поверхностных токов связаны между собой, так как, изменяя систему отсчета, будут меняться характеристики магнитного и электрического полей. В системе отсчета, в которой поверхностные заряды неподвижны, соответственно, будет наблюдаться только электрическое поле. В связи с этим интерес представляет также

исследование особенностей индукции магнитного поля при переходе через поверхностный ток. Знание величины индукции магнитного поля и величины напряженности электрического поля в точках, принадлежащих поверхности, необходимо для расчета сил, действующих на поверхностный слой.

Основная часть. Рассмотрим поверхностный ток, текущий по бесконечной плоскости в одном направлении в вакууме. Он возникает, например, если распределенный на плоскости заряд начнет двигаться в некотором направлении (на рис. 1 ток направлен за плоскость чертежа). Два тока противоположного направления разделяют пространство на три области: внутри пластин, слева и справа от пластин (рис. 2).

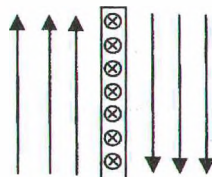


Рис. 1. Поверхностный ток одного направления

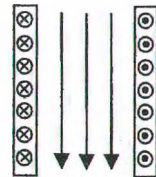


Рис. 2. Два тока противоположного направления

Магнитное поле тока на рис. 1 является однородным как с одной стороны плоскости, так и с другой, линии индукции направлены вверх слева и вниз справа [3]. Магнитное поле противоположно направленных токов на рис. 2 является также однородным (суперпозиция полей двух плоскостей) в каждой из трех областей, линии индукции направлены вниз между плоскостями, слева и справа поле отсутствует. Графическая зависимость величины индукции магнитного поля поверхностных токов на расстоянии r от них представлена на рис. 3.

Если на плоскости (рис. 1) выделить какой-либо элемент тока, то результирующая сила, действующая на него, будет равна нулю ввиду симметрии. Поэтому если на правой плоскости (рис. 2) выделить какой-либо элемент тока, то результирующая сила, действующая на него, равна силе взаимодействия элемента тока с поверхностными токами левой плоскости. Соответственно, по силе можно определить индукцию магнитного поля в точках расположения элементов тока, т. е. на самих плоскостях.

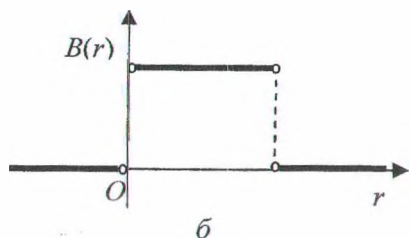
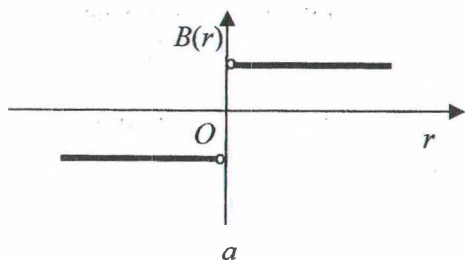


Рис. 3. Зависимость величины индукции магнитного поля поверхностных токов от расстояния до исследуемых точек:
 а – для поверхностного тока одного направления;
 б – для двух токов противоположного направления

В связи с этим более полными (по сравнению с рис. 3) будут графические зависимости, которые представлены на рис. 4, так как эти графики отражают и величину индукции магнитного поля в точках, принадлежащих самим плоскостям с токами (точки черного цвета на графиках).

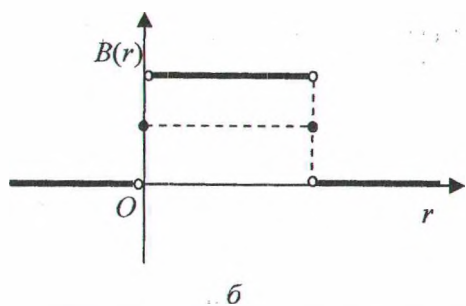
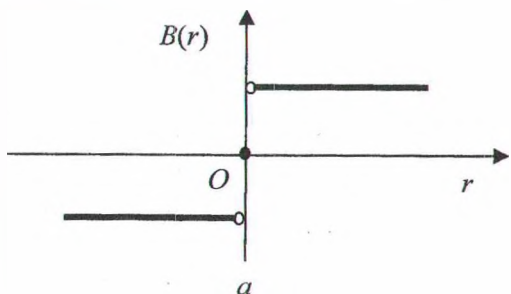


Рис. 4. Зависимость величины индукции магнитного поля поверхностных токов от расстояния r :
 а – для поверхностного тока одного направления;
 б – для двух токов противоположного направления

Рассмотрим поверхностный ток, текущий по цилиндрической поверхности вдоль ее оси. Пусть радиус цилиндра равен R , а расстояние от оси цилиндра до точки, в которой находим индукцию магнитного поля, составляет r (точка A

на рис. 5). Представим такой цилиндрический ток как совокупность множества одинаковых элементов тока, каждый из которых относится к полоскам длиной dl и шириной $Rd\theta$ (рис. 5).

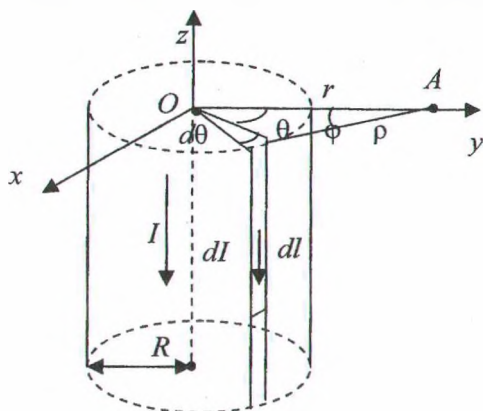


Рис. 5. Поверхностный ток, текущий по цилиндрической поверхности вдоль ее оси

Величина тока, приходящаяся на указанную полоску шириной $Rd\theta$, равна

$$dI = \frac{I}{2\pi R} Rd\theta = \frac{I}{2\pi} d\theta. \quad (1)$$

Выделенный на рис. 5 элемент тока и все другие элементы, расположенные вдоль выделенной полоски, согласно принципу суперпозиции, дадут поле бесконечного прямого тока. Используя выражение для величины индукции магнитного поля бесконечного прямого тока, можно для величины индукции поля бесконечной выделенной полоски записать

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 Id\theta}{(2\pi)^2\rho}. \quad (2)$$

Направление вектора $d\vec{B}$ укажем на рис. 6, который является горизонтальной проекцией исследуемого тока и его поля. Ток dI на этом рисунке направлен за плоскость чертежа.

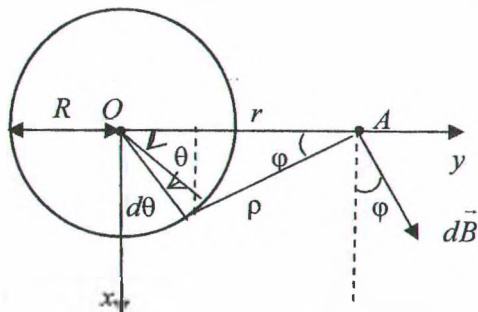


Рис. 6. Направление вектора индукции магнитного поля $d\vec{B}$ в точке A

Проекции вектора $d\vec{B}$ на оси Ox и Oy представляются соответственно в виде

$$dB_x = dB \cos \varphi = \frac{\mu_0 I d\theta}{(2\pi)^2 \rho} \cos \varphi, \quad (3)$$

$$dB_y = dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I d\theta}{(2\pi)^2 \rho} \sin \varphi. \quad (4)$$

Отсюда получаем выражение для проекций вектора B поля, создаваемого в точке A током, текущим по поверхности S :

$$B_x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I \cos \varphi d\theta}{(2\pi)^2 \rho}, \quad (5)$$

$$B_y = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I \sin \varphi d\theta}{(2\pi)^2 \rho}. \quad (6)$$

Интегрирование по углу θ в выражениях (5) и (6) осуществляется в пределах от $-\pi$ до π так, чтобы охватить всю поверхность S . Используя теорему косинусов, квадрат расстояния от тока dI до точки A представим в виде

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta. \quad (7)$$

Учитывая, что $\cos \varphi = (r - R \cos \theta) / \rho$, для B_x получим

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I \cos \varphi d\theta}{(2\pi)^2 \rho} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I (r - R \cos \theta) d\theta}{(2\pi)^2 \rho^2} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I (r - R \cos \theta) d\theta}{4\pi^2 (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $\rho \sin \varphi = R \sin \theta$, для B_y получим

$$\begin{aligned} B_y &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I \sin \varphi d\theta}{(2\pi)^2 \rho} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I R \sin \theta d\theta}{(2\pi)^2 \rho^2} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 I R \sin \theta d\theta}{4\pi^2 (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисления показывают, что

$$B_x = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi R} & \text{при } r = R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (10)$$

$$B_y = 0. \quad (11)$$

Тогда модуль \vec{B} вектора индукции магнитного поля, создаваемого всем током в точке A , представляется в следующем виде:

$B = 0$ для точек внутри цилиндра,

$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ для точек на поверхности цилиндра, (12)

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ для точек вне цилиндра.

Графическая зависимость величины индукции магнитного поля тока, текущего по поверхности цилиндра, от расстояния r представлена на рис. 7.

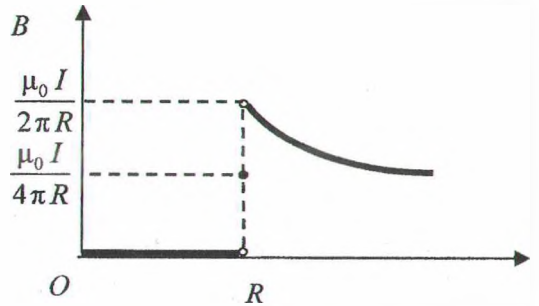


Рис. 7. Зависимость величины индукции магнитного поля от расстояния r

Из проведенных расчетов следует, что модуль индукции магнитного поля на поверхности цилиндра не равен его значению вблизи внешней поверхности цилиндра. Величина индукции магнитного поля тока, текущего по поверхности цилиндра, для точек внутри и вне цилиндра получается такой же, как и в [6].

Таким образом, применение принципа суперпозиции для определения индукции магнитного поля поверхностных токов вдоль оси цилиндра позволяет найти ее значение как для точек, принадлежащих цилиндрической поверхности, так и вне ее.

Зная индукцию магнитного поля в точках, принадлежащих цилиндрической поверхности, можно найти силу, действующую на элемент тока. Согласно закону Ампера, величина этой силы составляет

$$\begin{aligned} dF &= B d l d l = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \left(\frac{I}{2\pi} d\theta \right) d l = \\ &= \frac{\mu_0 I^2 d\theta d l}{8\pi^2 R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $dS = R d\theta d l$ — площадь выделенной элементарной полоски.

Учитывая поверхностную плотность тока j через окружность длиной L (сечение цилиндра) $j = I / L = I / 2\pi R$, получим

$$dF = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{2\pi R} \right)^2 dS = \frac{\mu_0 j^2}{2} dS. \quad (14)$$

Вектор $d\vec{F}$ в каждой точке поверхности цилиндра направлен по радиусу, к оси цилиндра,

т. е. текущий по цилиндрической поверхности ток сжимает цилиндр. Давление, испытываемое стенками цилиндра, равно

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 j^2}{2} = \frac{2B_n^2}{\mu_0}, \quad (15)$$

где B_n – индукция магнитного поля в точках, принадлежащих поверхности цилиндра. Эта формула справедлива для любой гладкой поверхности, в том числе и для тока, текущего по плоскости, так как в этом случае $B_n = 0$.

Заключение. Сравнение графиков, представленных на рис. 4 и 7, показывает, что в характерах зависимости величины индукции магнитного поля при переходе через равномерно распределенный поверхностный ток имеется закономерность. Графики в обоих случаях претерпевают разрыв с обособленной точкой в месте разрыва. Это позволяет уточнить известные граничные условия для вектора напряженности магнитного поля \vec{H} и вектора магнитной индукции \vec{B} , создаваемых током, текущим по поверхности. Касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля \vec{H} (и, соответственно, вектора магнитной индукции \vec{B}) претерпевают разрыв при переходе через поверхностный ток, равный [2, 3, 6]

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_n. \quad (16)$$

С учетом величины индукции магнитного поля для самой поверхности эти граничные условия можно представить в виде

$$B_{2\tau} - B_{n\tau} = \frac{\mu_0}{2} i_n, \quad B_{n\tau} - B_{1\tau} = \frac{\mu_0}{2} i_n, \quad (17)$$

где $B_{n\tau}$ – значение тангенциальной составляющей индукции на самой поверхности. Граничные условия в виде (17) учитывают значение индукции на самой поверхности, чего нет в условиях (16).

Литература

1. Сивухин, Д. В. Электричество / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1983. – 703 с.
2. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 464 с.
3. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1991. – 280 с.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 480 с.
5. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
6. Наркевич, И. И. Физика: учеб. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
7. Ахраменко, Н. А. К определению электрического поля поверхностно распределенных зарядов / Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2006. – № 2. – С. 5–7.
8. Ахраменко, Н. А. Закон сохранения энергии и электрическое поле сферы / Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко, В. Я. Матющенко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 95–97.