

А. В. Жаркевич, ст. преподаватель; И. И. Наркевич, профессор;  
Е. В. Фарафонтон, мл. науч. сотрудник

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПЛЕНОК

The two level statistical model of the deformed crystalline film with point defects of vacancies type is worked out in this article. The two level molecular statistical descriptions of inhomogeneous systems properties with central interaction are used. Original positions of the two dimension statistical model are formulated. The system of closed integral equations for average forces potentials of an inhomogeneous deformed media is used for a statistical description of the structure of this model. The system of two integral equations for potentials of average forces is made for a homogeneous strain state of a lattice. It is decided in a Gauss approximation. In result, the system of nonlinear algebraically an equation for transformation coefficients of potentials of average forces is obtained.

**Введение.** Применение двухуровневого молекулярно-статистического описания свойств неоднородных конденсированных сред [2] позволило разработать одномерную статистическую модель молекулярного кристалла [3–8]. В связи с этим появилась возможность приступить к разработке двумерной статистической модели деформированного кристалла с точечными дефектами типа вакансий.

**Основная часть.** Сформулируем модель двумерной кристаллической решетки. Для этого рассмотрим плоскую кристаллическую сетку из  $M$  квадратных ячеек со стороной  $R_0$ , по которым статистически распределены  $N$  молекул ( $N < M$ ) с взаимодействием, описываемым с помощью потенциала Леннарда – Джонса:

$$\Phi(r) = 4\varepsilon \left( \frac{\sigma^{12}}{r^{12}} - \frac{\sigma^6}{r^6} \right), \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – линейный и энергетический параметры соответственно. Следует заметить [1], что в общем случае объем  $V$  среды разбивается на ячейки объемом  $\omega$  таким образом, что в объеме каждой микроячейки может одновременно находиться не более одной частицы. Поскольку  $M > N$ , то  $(M - N)$  ячеек плоской сетки являются пустыми, т. е. вакантными. Эти вакантные ячейки будем рассматривать как ячейки, заполненные квазичастицами, которые не взаимодействуют между собой и с реальными частицами (молекулами).

Частицы (молекулы и квазичастицы) движутся только в плоскости  $Oxy$ . Будем считать, что перемещение вдоль оси  $z$  затруднено каким-либо внешним полем.

Создадим однородное плосконапряженное состояние двумерной модели, в котором относительные деформации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  различны. Поэтому взаимодействие частиц в соседних ближайших ячейках, центры которых расположены вдоль оси  $Ox$ , будет отличаться от аналогичного взаимодействия для ячеек с центрами, расположенными вдоль оси  $Oy$ . Это означает, что в двумерной решетке нужно использовать два типа потенциалов средних сил.

Пусть потенциал  $\varphi_1(x, y)$  определяет взаимодействие молекулы с координатами  $x, y$  (рис. 1) в некоторой ячейке с другой молекулой, расположенной в другой ближайшей ячейке, причем их центры расположены на линии, параллельной оси  $Ox$ . Тогда потенциал  $\varphi_2(y, x)$  будет определять аналогичное взаимодействие по отношению к двум ячейкам, центры которых расположены на линии, параллельной оси  $Oy$ .

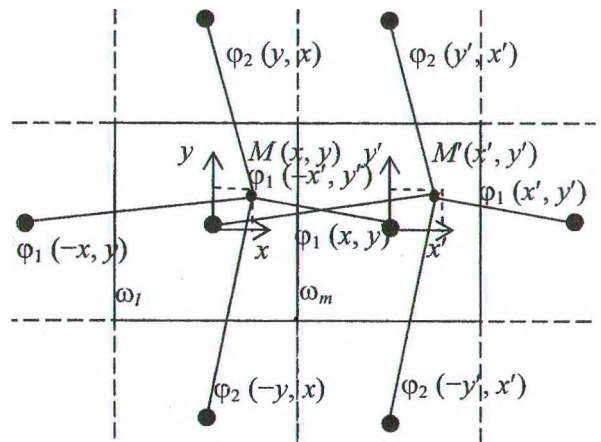


Рис. 1. Двумерная статистическая модель деформированной кристаллической пленки с точечными дефектами типа вакансий

Далее, для статистического описания структуры деформированной плоской модели воспользуемся системой замкнутых интегральных уравнений для потенциалов средних сил  $\varphi_{lm}$  неоднородной деформированной среды [1], которая получена с учетом наличия  $(M - N)$  вакантных ячеек в решетке из  $M$  узлов и  $N$  молекул [9, 10]:

$$n_l^a \exp\{-\varphi_{lm}(\mathbf{q}_l)\} = \frac{n_{lm}^{aa} \int_{\omega_m} \exp\left\{-\left[\Phi(\mathbf{r}_{lm}) + \sum_{k \neq l, m}^M \varphi_{mk}(\mathbf{q}_m)\right]\right\} d\mathbf{q}_m}{\int_{\omega_m} \exp\left\{-\sum_{k \neq l, m}^M \varphi_{mk}(\mathbf{q}_m)\right\} d\mathbf{q}_m} +$$

$$n_{lm}^{aa} \int_{\omega_l} \exp \left\{ - \left[ \Phi_{lm}(\mathbf{q}_l) + \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{lk}(\mathbf{q}_l) \right] \right\} d\mathbf{q}_l \quad (2)$$

$$\int_{\omega_l} \exp \left\{ - \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{lk}(\mathbf{q}_l) \right\} d\mathbf{q}_l$$

где  $n_{lm}^{aa}$  – вероятность того, что в ячейках  $\omega_l$  и  $\omega_m$  находятся по одной молекуле (частицы сорта  $a$ );  $n_{lm}^{as}$  – вероятность заполнения ячейки  $\omega_l$  молекулой при условии, что ячейка  $\omega_m$  вакантная (частицы сорта  $s$ );  $n_l^a$  – вероятность заполнения ячеек частицами сорта  $a$ ;  $n_l^s = 1 - n_l^a$  – вероятность заполнения ячеек квазичастицами, т. е. вероятность того, что ячейка является вакантной. Эти числа заполнения удовлетворяют двум условиям нормировки:

$$n_{lm}^{aa} + n_{lm}^{as} = n_l^a, \quad n_{lm}^{sa} + n_{lm}^{ss} = n_l^s. \quad (3)$$

Отметим, что для сокращения записи в уравнении (2) и в последующих соотношениях используются переопределенные потенциалы, включающие в себя температуру, а именно:

$$\Phi_{lm}(\mathbf{q}_l) = \frac{1}{\theta} \Phi_{lm}^*(\mathbf{q}_l), \quad \Phi(\mathbf{r}_{lm}) = \frac{1}{\theta} \Phi^*(\mathbf{r}_{lm}).$$

Для рассматриваемой здесь системы, состоящей из молекул двух сортов ( $a$  и  $s$ ), получено следующее выражение [10] для двухячеечных чисел заполнения  $n_{lm}^{as}$ , т. е.

$$n_{lm}^{as} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ n_m^s - n_l^s - z_{lm}^{-1} \right] + \sqrt{\left[ n_m^s - n_l^s - z_{lm}^{-1} \right]^2 + 4n_l^a n_m^s z_{lm}^{-1}} \right\}. \quad (4)$$

Вспомогательный функционал  $z_{lm}$  определяется как

$$z_{lm} = \int_{\omega_l} \int_{\omega_m} \exp \{ -\Phi(\mathbf{r}_{lm}) \} \bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_l) \bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_m) d\mathbf{q}_l d\mathbf{q}_m, \quad (5)$$

где  $\bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_l)$ ,  $\bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_m)$  – вспомогательные нормированные на единицу одночастичные функции распределения, с помощью которых проводится усреднение по положениям молекулы в ячейках  $\omega_l$  и  $\omega_m$  ( $\mathbf{q}_l \subset \omega_l$ ,  $\mathbf{q}_m \subset \omega_m$ ):

$$\bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_m) = \frac{\exp \left\{ - \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{mk}(\mathbf{q}_m) \right\}}{\int_{\omega_m} \exp \left\{ - \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{mk}(\mathbf{q}_m) \right\} d\mathbf{q}_m}, \quad (6)$$

$$\bar{F}_{11}^*(\mathbf{q}_l) = \frac{\exp \left\{ - \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{lk}(\mathbf{q}_l) \right\}}{\int_{\omega_l} \exp \left\{ - \sum_{k \neq l, m}^M \Phi_{lk}(\mathbf{q}_l) \right\} d\mathbf{q}_l}. \quad (7)$$

Ограничимся учетом взаимодействия только между частицами, находящимися в ближайших соседних ячейках плоской решетки. Тогда в состоянии однородного продольного (вдоль оси  $x$ ) и поперечного растяжений с относительными деформациями микроячеек  $\lambda_1 = (R_1 - R_0)/R_0$  и  $\lambda_2 = (R_2 - R_0)/R_0$  соответственно при  $n_l^a \equiv n$  ( $l=1, 2, \dots, M$ ) с учетом обозначений на рис. 1 и свойств симметрии система интегральных уравнений (2) примет следующий вид:

$$\text{лнexp} \{ -\Phi_1(x, y) \} = \frac{n_{lm}^{aa} I_{11}(x, y)}{I_{13}} + \frac{n_{lm}^{as} I_{12}}{I_{14}}, \quad (8)$$

где

$$I_{11} = \int_{\omega_m} \exp \left\{ - \left[ \Phi_1(x - x', y - y') + \Phi_1(x', y') + \Phi_2(y', x') + \Phi_2(-y', x') \right] \right\} dx' dy',$$

$$I_{13} = \int_{\omega_m} \exp \left\{ - \left[ \Phi_1(x', y') + \Phi_2(y', x') + \Phi_2(-y', x') \right] \right\} dx' dy',$$

$$I_{12} = \int_{\omega_l} \exp \left\{ - \left[ \Phi_1(x, y) + \Phi_1(-x, y) + \Phi_2(y, x) + \Phi_2(-y, x) \right] \right\} dx dy,$$

$$I_{14} = \int_{\omega_l} \exp \left\{ - \left[ \Phi_1(-x, y) + \Phi_2(y, x) + \Phi_2(-y, x) \right] \right\} dx dy.$$

Если в уравнении (8) осуществить замену индексов и координат по схеме:  $1 \rightarrow 2$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $x' \rightarrow y'$ ,  $2 \rightarrow 1$ ,  $y \rightarrow x$ ,  $y' \rightarrow x'$ , то получится аналогичное уравнение для потенциала  $\Phi_2(y, x)$ .

Для аналитического решения полученной системы интегральных уравнений разложим потенциалы средних сил в ряд по отклонениям  $x$  и  $y$  молекул от центров своих ячеек, т. е. узлов недеформированной кристаллической решетки, изображенной на рис. 1. Ограничимся тремя первыми членами этих разложений, что соответствует приближению Гаусса для коррелятивных функций распределения молекул в статистическом подходе:

$$\Phi_1(x, y) \cong \Phi_{01} + \alpha_1 x + \beta_{11} x^2 + \beta_{12} y^2, \quad (9)$$

$$\Phi_1(-x, y) \cong \Phi_{01} - \alpha_1 x + \beta_{11} x^2 + \beta_{12} y^2, \quad (10)$$

$$\Phi_1(x', y') \cong \Phi_{01} + \alpha_1 x' + \beta_{11} x'^2 + \beta_{12} y'^2, \quad (11)$$

$$\Phi_1(-x', y') \cong \Phi_{01} - \alpha_1 x' + \beta_{11} x'^2 + \beta_{12} y'^2, \quad (12)$$

$$\Phi_2(y, x) \cong \Phi_{02} + \alpha_2 y + \beta_{21} x^2 + \beta_{22} y^2, \quad (13)$$

$$\Phi_2(-y, x) \cong \Phi_{02} - \alpha_2 y + \beta_{21} x^2 + \beta_{22} y^2, \quad (14)$$

$$\varphi_2(y', x') \equiv \varphi_{02} + \alpha_2 y' + \beta_{21} x'^2 + \beta_{22} y'^2, \quad (15)$$

$$\varphi_2(-y', x') \equiv \varphi_{02} - \alpha_2 y' + \beta_{21} x'^2 + \beta_{22} y'^2. \quad (16)$$

Здесь учитывается, что функции  $\varphi_1$  симметричны относительно отклонения  $y$ , а функции  $\varphi_2$  — относительно отклонения  $x$ .

Выражения для потенциалов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , зависящих от взаимного расстояния  $\bar{r}$  между молекулами в деформированном кристалле, обозначены с помощью линейного параметра  $\sigma$  ( $\rho = \bar{r}/\sigma$ ) и энергетического параметра  $\varepsilon$

( $\Phi(r_{lm}) = \frac{1}{\theta} \Phi(r_{lm}), \theta = kT/\varepsilon$  — приведенная температура).

Взаимные расстояния между двумя частицами, находящимися в двух соседних микроячейках деформированной двумерной модели (рис. 2), выразим через параметр  $R_0$  решетки, смещение  $x$  и  $y$ , а также относительные деформации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\bar{\rho}_{12} = \left[ (R_0 + x - x')^2 (1 + \lambda_1)^2 + (y - y')^2 (1 + \lambda_2)^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

$$\bar{\rho}_{21} = \left[ (R_0 + y - y')^2 (1 + \lambda_2)^2 + (x - x')^2 (1 + \lambda_1)^2 \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Учитывая симметрию функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  относительно взаимных отклонений  $(y - y')$  и  $(x - x')$  соответственно, разложим эти потенциалы в ряд Тейлора и ограничимся четырьмя первыми членами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x - x', y - y') \equiv & \Phi_{01} + a_1(x - x') + \\ & + b_{11}(x - x')^2 + b_{12}(y - y')^2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(y - y', x - x') \equiv & \Phi_{02} + a_2(y - y') + \\ & + b_{22}(y - y')^2 + b_{21}(x - x')^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты разложения, зависящие от относительной продольной  $\lambda_1$  и поперечной  $\lambda_2$  деформации, определяются по следующим формулам ( $i, j = 1, 2$ ):

$$\Phi_{0i} = \frac{4}{\theta R_i^6} \left[ \frac{1}{R_i^6} - 1 \right], \quad (21)$$

$$a_i = \frac{24}{\theta R_0 R_i^6} \left[ 1 - \frac{2}{R_i^6} \right], \quad (22)$$

$$b_{ii} = \frac{12}{\theta R_0^2 R_i^6} \left[ \frac{26}{R_i^6} - 7 \right], \quad (23)$$

$$b_{ij} = \frac{12}{\theta R_0^2 R_j^6} \left[ 1 - \frac{2}{R_j^6} \right], \quad (i \neq j). \quad (24)$$

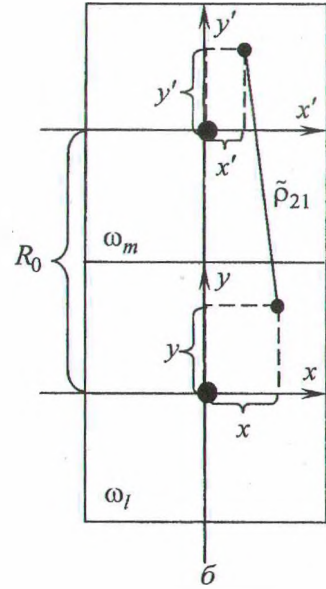
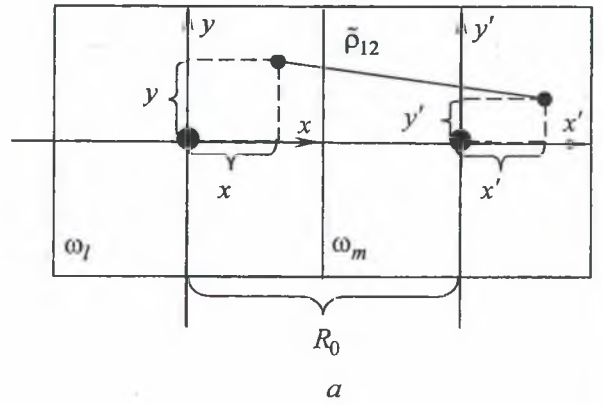


Рис. 2. Взаимное расстояние между двумя частицами, находящимися в двух соседних микроячейках деформированной двумерной модели: а — вдоль оси  $Ox$ ; б — вдоль оси  $Oy$

Поскольку рассматривается однородная деформация двумерной модели, то функциональное выражение для двухячеечных чисел заполнения (4) упрощается, так что

$$n_{lm}^{aa} = \frac{1}{2z_{lm}} \left( -1 + \sqrt{1 + 4n_l^a n_m^a z_{lm}} \right). \quad (25)$$

Будем использовать, как и ранее для одномерной модели [8], метод последовательных приближений и учтем, что концентрация вакансий в решетке мала ( $n_v = 1 - n_a \ll 1$ ). Поэтому, разложив (25) в ряд по малому параметру  $y = 4n(1 - n)z_{lm}$  и ограничившись первыми членами разложения для двухячеечных чисел заполнения  $n_{lm}^{aa}$ , получим:

$$n_{lm}^{aa} \approx n(1 - n) [1 - n(1 - n)z_{lm}]. \quad (26)$$

Далее, используя условие нормировки (3), имеем

$$n_{lm}^{aa} \approx n^2 [1 + (1 - n)^2 z_{lm}]. \quad (27)$$

В качестве первого шага использования метода итераций при решении интегральных уравнений для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (см. уравнение (8)) учтем, что  $n_{lm}^{aa} = n - n_{lm}^{as} \gg n_{lm}^{as}$ , поэтому в их правых частях пренебрежем вторым слагаемым, т. е.

$$\exp\{-\varphi_1(x, y)\} \cong \frac{n_{lm}^{aa} I_{11}(x, y)}{I_{13}}, \quad (28)$$

$$\exp\{-\varphi_2(y, x)\} \cong \frac{n_{lm}^{aa} I_{21}(y, x)}{I_{23}}. \quad (29)$$

Как и в случае одномерной модели [3, 9], будем считать, что, подынтегральные функции в приближении Гаусса убывают достаточно быстро при увеличении смещений  $x, y$ , и поэтому интегралы по ячейкам плоской кристаллической решетки можно заменить на интегралы по переменным  $x, y$  в бесконечных пределах.

С учетом (9)–(16), (19), (20) вычислим интегралы в уравнениях (28), (29), воспользовавшись известным табличным интегралом вида [11]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-qt + pt^2\} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{\frac{q^2}{4p}\right\}, \quad p > 0. \quad (30)$$

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  и  $y$  получим систему нелинейных алгебраических уравнений для искоемых коэффициентов разложения потенциалов средних сил  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(y, x)$ :

$$\varphi_{01} = \Phi_{01} + \frac{(\alpha_1^0)^2}{4(2\beta_{21}^0 + \beta_{11}^0)} - \frac{(\alpha_1^0 - a_1)^2}{4(2\beta_{21}^0 + \beta_{11}^0 + b_{11})} -$$

$$-\ln \left[ \frac{n_{lm}^{aa}}{n} \sqrt{\frac{(2\beta_{21}^0 + \beta_{11}^0)(2\beta_{22}^0 + \beta_{12}^0)}{(2\beta_{21}^0 + b_{11} + \beta_{11}^0)(2\beta_{22}^0 + b_{12} + \beta_{12}^0)}} \right], \quad (31)$$

$$\alpha_1 = a_1 - \frac{b_{11}(a_1 - \alpha_1^0)}{(b_{11} + \beta_{11}^0 + 2\beta_{21}^0)}, \quad (32)$$

$$\beta_{11} = b_{11} - \frac{b_{11}^2}{(b_{11} + \beta_{11}^0 + 2\beta_{21}^0)}, \quad (33)$$

$$\beta_{12} = b_{12} - \frac{b_{12}^2}{(b_{12} + \beta_{12}^0 + 2\beta_{22}^0)}, \quad (34)$$

$$\varphi_{02} = \Phi_{02} + \frac{(\alpha_2^0)^2}{4(\beta_{22}^0 + 2\beta_{12}^0)} - \frac{(\alpha_2^0 - a_2)^2}{4(\beta_{22}^0 + 2\beta_{12}^0 + b_{22})} -$$

$$-\ln \left[ \frac{n_{lm}^{aa}}{n} \sqrt{\frac{(\beta_{21}^0 + 2\beta_{11}^0)(\beta_{22}^0 + 2\beta_{12}^0)}{(\beta_{21}^0 + b_{21} + 2\beta_{11}^0)(\beta_{22}^0 + b_{22} + 2\beta_{12}^0)}} \right], \quad (35)$$

$$\alpha_2 = a_2 - \frac{b_{22}(a_2 - \alpha_2^0)}{(b_{22} + \beta_{22}^0 + 2\beta_{12}^0)}, \quad (36)$$

$$\beta_{21} = b_{21} - \frac{b_{21}^2}{(b_{21} + \beta_{21}^0 + 2\beta_{11}^0)}, \quad (37)$$

$$\beta_{22} = b_{22} - \frac{b_{22}^2}{(b_{22} + \beta_{22}^0 + 2\beta_{12}^0)}. \quad (38)$$

Вспомогательные функции распределения (6), (7) для плоской деформированной решетки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{11}^*(x, y) &= \frac{\sqrt{(\beta_{11} + 2\beta_{21})(\beta_{12} + 2\beta_{22})}}{\pi} \times \\ &\times \exp\left\{-\left[\frac{\alpha_1^2}{4(\beta_{11} + 2\beta_{21})} - \alpha_1 x + (\beta_{11} + 2\beta_{21})x^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\beta_{12} + 2\beta_{22})y^2\right]\right\}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{11}^*(y, x) &= \frac{\sqrt{(\beta_{21} + 2\beta_{11})(\beta_{22} + 2\beta_{12})}}{\pi} \times \\ &\times \exp\left\{-\left[\frac{\alpha_2^2}{4(\beta_{22} + 2\beta_{12})} - \alpha_2 y + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\beta_{22} + 2\beta_{12})y^2 + (\beta_{21} + 2\beta_{11})x^2\right]\right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

В приближении Гаусса нормированная на единицу коррелятивная функция распределения молекулы вблизи узла микроячейки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{11}(x, y) &= 2n \frac{\sqrt{(\beta_{11} + \beta_{21})(\beta_{12} + \beta_{22})}}{\pi} \times \\ &\times \exp\left\{-2\left[(\beta_{11} + \beta_{21})x^2 + (\beta_{12} + \beta_{22})y^2\right]\right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

**Заключение.** Предложенная статистическая модель деформирования тонких молекулярных пленок позволила на основе двухуровневого молекулярно-статистического описания конденсированных систем получить систему нелинейных уравнений для коэффициентов разложения потенциалов средних сил. Ее решение в свою очередь позволит изучить влияние деформации и температуры на младшие коррелятивные функции частиц (молекул) и квазичастиц (вакансий). Знание функций распределения необходимо для статистического расчета свободной энергии и других термодинамических потенциалов, которые являются функциями концентрации и относительных деформаций. Решение вариационной задачи для этих потенциалов обеспечит статистическое описание

зависимости концентрации и механических напряжений от деформации.

### Литература

1. Наркевич, И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / И. И. Наркевич. – СПб.: СПГУ, 1993. – 242 с.

2. Ротт, Л. А. Статистическая теория молекулярных систем / Л. А. Ротт. – М.: Наука, 1979. – 280 с.

3. Наркевич, И. И. Исследование структуры одномерной статистической модели одноосного деформирования молекулярного кристалла / И. И. Наркевич, А. В. Жаркевич, П. П. Казаков // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2000. – Вып. IX. – С. 65–71.

4. Наркевич, И. И. Молекулярно-статистическое описание неоднородно деформированных образцов. 1. Постановка задачи и метод ее решения / И. И. Наркевич, А. В. Жаркевич // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 6. – С. 1313–1319.

5. Исследование свойств равновесных и неравновесных конденсированных систем: отчет о НИР (промежуточ.) / Бел. гос. технол. ун-т (БГТУ); рук. темы И. И. Наркевич. – Минск, 2001. – 48 с. – № ГР 20011612.

6. Молекулярно-статистическое описание неоднородно деформированных образцов. 2. Расчет

функций распределения молекул и вакансий в одномерной однородно деформированной статистической модели растяжения – сжатия / И. И. Наркевич [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75, № 4. – С. 170–176.

7. Жаркевич, А. В. Термодинамические и структурные характеристики конденсированных систем на основе взаимосвязного микро- и макроскопического представления: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. В. Жаркевич. – Минск, 2005. – 131 с.

8. Жаркевич, А. В. Молекулярно-статистическое описание неоднородно деформированных образцов. 3. Расчет диаграммы растяжения – сжатия одномерной статистической модели деформирования молекулярного кристалла / А. В. Жаркевич // Инженерно-физический журнал. – 2004. – Т. 77, № 4. – С. 144–149.

9. Наркевич, И. И. Статистическое изучение релаксации кристаллической решетки в окрестности дефектов различной природы / И. И. Наркевич // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 5. – С. 86–92.

10. Наркевич, И. И. Метод множителей Лагранжа в проблеме нормировки коррелятивных функций многокомпонентного кристалла с дефектами / И. И. Наркевич // Высококачественные вещества. – 1990. – № 1. – С. 67–75.

11. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.