

ДИВЕКТОРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ РАСЩЕПЛЕНИЯ В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

We suggest widening of applications of vector decomposition methods to fractional partial differential equation. The construction of divectorization decomposition model which is based on both a novel shifted version of classical Grünwald finite difference approximation for the non-local fractional derivative operator and the methodology of multicomponent vector decomposition schemes is discussed in this paper. Numerical examples using the vector decomposition schemes for both 2D problem with parabolic equation and 2D initial-boundary value fractional partial differential equation with variable coefficients on finite domain. Numerical experiment including known exact solution of problems demonstrates the behavior of the numerical error which verifies the order of convergence.

Введение. Дивекторизованная модель расщепления, представленная в статье, создана на основе классического принципа аддитивности, являющегося одним из основополагающих в теории экономических методов решения научно-технических задач. Среди численных методов, основанных на аддитивном представлении исходного дифференциального оператора, необходимо отметить схемы расщепления, получившие развитие с 1960 г. в работах А. А. Самарского, Н. Н. Яненко, J. Douglas, D. Peaceman и других известных ученых [1–4]. Принципиальный шаг в модификации методов расщепления был сделан в научной школе профессора В. Н. Абрашина предложением векторно-аддитивных схем полной аппроксимации [5–7].

Сохранение высокого уровня актуальности принципа аддитивности объясняется современными тенденциями в развитии и реализации методов математического моделирования при решении научно-технических задач, требующих системного подхода в разработке средств компьютерного анализа, основанного на перспективной идее декомпозиции – сведении сложной исходной задачи к совокупности более простых однотипной структуры.

В данной работе проводится анализ векторно-аддитивных схем и предлагается расширить спектр применения векторно-аддитивных методов. Это достигается дивекторизацией численной модели, основанной на векторно-аддитивной методологии, позволяющей использовать новейшую смещенную версию традиционной аппроксимации Грюнвальда – Летникова для дробных пространственных производных при решении многомерных задач с дифференциальными уравнениями дробных порядков в частных производных с переменными коэффициентами с заданными начальными и граничными условиями на конечной области.

1. Постановка задачи. Рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

где линейный оператор $A: H \rightarrow H$, который действует в H и является положительно-определенным $(Ay, y) \geq \alpha \|y\|^2$, $\alpha > 0$, представим в следующем виде:

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}, \quad (3)$$

где A_{α} – линейные положительные операторы в H , причем

$$\prod_{\alpha=1}^p D(A_{\alpha}) = D(A).$$

Согласно [8, 9], вместо одного скалярного решения $u(t)$ введем вектор-решений $U(t) = (u_1(t), \dots, u_p(t))$. Число функций $u_i(t)$ равно числу слагаемых в сумме (3), т. е. $i = \alpha$, и каждая отдельная компонента $u_{\alpha}(t)$ аппроксимирует решение исходной задачи.

Один из способов построения векторной модели расщепления состоит в следующем: исходная задача (1), (2) сводится к системе однотипных задач:

$$\frac{du_{\alpha}}{dt} + \sum_{\beta=1}^p A_{\beta} u_{\beta} = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_{\alpha}(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1, p}. \quad (5)$$

Заменим каждую задачу (4), (5) с номером α разностной схемой, получим

$$\frac{y_{\alpha}^{n+1} - y_{\alpha}^n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_{\beta} y_{\beta}^{n+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^p A_{\beta} y_{\beta}^n = f, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$y_{\alpha}(0) = u_0, \quad y_{\alpha}^{n+1} = y_{\alpha}(t_{n+1}, x). \quad (6)$$

В случае, когда верхний предел суммирования меньше нижнего, будем считать сумму равной нулю.

В данной работе рассмотрим некоторые характерные свойства разностных схем, являющихся модификациями схемы (6), а именно:

$$\frac{y_{\alpha}^{n+1} - \tilde{y}}{\tau} + \alpha A_{\alpha} (y_{\alpha}^{n+1} - y_{\alpha}^n) + \sum_{\beta=1}^p A_{\beta} y_{\beta}^n = f, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{p} \sum_{\beta=1}^p y_{\beta}, \quad y_{\alpha}(0) = u_0, \quad (7)$$

$$\frac{y_\alpha^{n+1} - y_{\alpha_0}}{\tau} + \sigma A_\alpha (y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n) + \sum_{\beta=1}^p A_\beta y_\beta^n = f, \quad \alpha = \overline{1, p},$$

$$y_\alpha(0) = 0, \quad \alpha_0 - \text{фиксированно}, \quad \alpha_0 \in [1, p], \quad (8)$$

где $\sigma > 0$ – вещественный параметр. Адаптируем эти алгоритмы для решения многомерных дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.

Аналитические методы решения уравнений «дробной» диффузии оказываются малоэффективными, а теория численных методов далека от завершения [10]. Методы, предлагаемые в данной статье, несомненно, частично устраняют данный пробел.

2. Аппроксимация и выбор решения. Для определения порядка аппроксимации представим схему (8) в следующем виде:

$$(1 + \tau \sigma A_\alpha) \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + \frac{1}{\tau} \left(y_\alpha^n - \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha^n \right) + \sum_{\beta=1}^p A_\beta y_\beta^n = f, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (9)$$

Если в разностную схему (9) подставить точное решение исходной задачи (1), (2), то получим выражение, идентичное результату подстановки точного решения (1), (2) в алгоритм (6), по аналогии [8]:

$$(1 + \tau \sigma A_\alpha) \frac{u_\alpha^{n+1} - u_\alpha^n}{\tau} + \frac{1}{\tau} \left(u_\alpha^n - \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p u_\alpha^n \right) + \sum_{\beta=1}^p A_\beta u_\beta^n - f = (1 + \tau \sigma A_\alpha) \frac{u_\alpha^{n+1} - u_\alpha^n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^p A_\beta u_\beta^n - f = u^n + O(\tau) - u^n + O(h^m) = O(\tau + h^m). \quad (10)$$

По определению порядка аппроксимации из [8], [9] получаем, что конечно-разностная схема (9), а это значит, и алгоритм (8) имеют первый порядок точности по времени при $\sigma > p/2$. Отметим, что выбор вещественного параметра σ в (7), (8) существенно влияет на точность метода. Так, при $\sigma = p/2$ обсуждаемые алгоритмы аппроксимируют уравнение (1), (2) со вторым порядком точности по τ .

Для доказательства этого факта просуммируем (7) по α и введем следующие обозначения:

$$Y^{n+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha^{n+1}, \quad Y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha^n,$$

получим разностную схему

$$\frac{Y^{n+1} - Y}{\tau} + \frac{1}{2} A (Y^{n+1} + Y) = f + R, \quad (11)$$

$$\text{где } R = \frac{1-p}{2p} \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha (y_\alpha^{n+1} + y_\alpha^n).$$

Алгоритм (11) имеет структуру, аналогичную схеме Кранка – Николсона, и, следовательно, погрешность аппроксимации исходной задачи (1), (2) равна $O(\tau^2 + h^m)$ [8, 9].

На первом этапе реализации алгоритмов (7) и (8) находятся все компоненты y_α приближенного решения. При этом методом трехточечной прогонки по соответствующему пространственному направлению параллельно решается каждое из уравнений систем в (7) и (8).

В алгоритме (7) за приближенное решение предлагается взять усредненное значение компонент решения, в схеме (8) любая из компонент вектор-решения может быть выбрана в качестве приближенного решения исходной дифференциальной задачи в любой момент времени $t_j = j\tau$ при равноправности каждой из компонент y_α , как доказано в [8].

3. Дивекторизация вычислительного процесса. Описанная выше векторно-аддитивная методология, детально проанализированная в [8], позволяет провести дивекторизацию численной модели при использовании новейшей смещенной версии конечно-разностной аппроксимации Грюнвальда при решении многомерных дифференциальных уравнений дробных порядков в частных производных с переменными коэффициентами с заданными начальными и граничными условиями на конечной области.

Для постановки задачи представим

$$Lu = L_1 u + L_2 u, \quad (12)$$

$$L_1 u = c_1(x_1, x_2) \frac{\partial^\alpha u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^\alpha}, \quad (13)$$

$$L_2 u = c_2(x_1, x_2) \frac{\partial^\beta u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^\beta}, \quad (14)$$

где $1 < \alpha, \beta \leq 2$, $c_1(x_1, x_2) > 0$, $c_2(x_1, x_2) > 0$ и с начальным $u(x_1, x_2, 0) = s(x_1, x_2)$ и граничными условиями Дирихле $u(x_1, x_2, t) = P(x_1, x_2, t)$ по периметру прямоугольной области $P(l_1, x_2, t) = P(m_1, x_2, t) = 0$ для $\{x_1, x_2\} \subset G$, где $G = \{(x_1, x_2): l_1 \leq x_1 \leq l_2, m_1 \leq x_2 \leq m_2\}$.

Рассмотрим математическую модель дробной диффузии [10]:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = Lu + f(x_1, x_2, t). \quad (15)$$

Используя формализм интегралодифференцирования дробного порядка, мы можем аппроксимировать дробную производную Римана – Лиувилля [11] при $1 < \alpha, \beta \leq 2$ с помощью смещенной версии классической аппроксимации Грюнвальда [10, 11] вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N_{x_1} \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{x_1}^\alpha} \sum_{m=0}^{N_{x_1}} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} \times$$

$$\times u[x_1 - (m-1)h, x_2, t], \quad (16)$$

где $h_{x_1}^\alpha = (x_1 - l_1) / N_{x_1}$, N_{x_1} – целое положительное число; аналогично для производной α -порядка.

Весовые множители Грюнвальда определим следующим образом:

$$g_\alpha(m) = \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} = (-1)^m \binom{\alpha}{m}, \quad (17)$$

$g_\beta(m)$ аналогично. Введем временную $\omega_t: \{t_n = n\tau, 0 \leq t_n \leq T\}$ с шагом τ и пространственную $\omega_n: \{(x_1(i), x_2(j)): x_1(i) = l_1 + i\Delta x_1, x_2(j) = m_1 + j\Delta x_2, i = 0, 1, \dots, N_{x_1}, j = 0, 1, \dots, N_{x_2}\}$ сетки, учитывая, что размер пространственной сетки в направлении x_1 и x_2 равен соответственно

$$\Delta x_1 = h_{x_1} = \frac{l_2 - l_1}{N_{x_1}} > 0, \quad \Delta x_2 = h_{x_2} = \frac{m_2 - m_1}{N_{x_2}} > 0.$$

Сеточные функции $u_{ij}^n, c_1(i, j), c_2(i, j), f_{ij}^n$ определены следующим образом: $u_{ij}^n = (x_1(i), x_2(j), t_n)$, $c_1(i, j) = c_1(x_1(i), x_2(j))$, $c_2(i, j) = c_2(x_1(i), x_2(j))$ и $f_{ij}^n = (x_1(i), x_2(j), t_n)$.

Учитывая условие согласованности в угловых точках прямоугольника, начальные и граничные условия определим аналогично [12].

Для решения задачи (15) используем дивекторизованные модели, основанные на векторно-аддитивных схемах (8), (9), следующего вида:

$$\frac{y_\gamma^{n+1} - \tilde{y}}{\tau} + \sigma A_\gamma (y_\gamma^{n+1} - y_\gamma^n) + \sum_{\beta=1}^2 A_\beta y_\beta^n = f^{n+1}, \quad \gamma = 1; 2,$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 y_\beta^n, \quad y_\gamma(0) = u_0, \quad (18)$$

$$\frac{y_\gamma^{n+1} - y_{\gamma 0}}{\tau} + \sigma A_\gamma (y_\gamma^{n+1} - y_\gamma^n) + \sum_{\beta=1}^2 A_\beta y_\beta^n = f^{n+1}, \quad \gamma = 1; 2,$$

$$y_\gamma(0) = 0, \quad \gamma_0 - \text{фиксированно}, \quad \gamma_0 \in \{1; 2\}. \quad (19)$$

В (18) и (19) конечно-разностные операторы выбираются с учетом (16), (17):

$$A_1 y_1^n = \frac{c_1(i, j)}{h_{x_1}^\alpha} \sum_{m=0}^{i+1} g_\alpha(m) y_{i-m+1, j}^n, \quad (20)$$

$$A_2 y_2^n = \frac{c_2(i, j)}{h_{x_2}^\beta} \sum_{m=0}^{j+1} g_\beta(m) y_{i, j-m+1}^n. \quad (21)$$

Таким образом, полученная численная модель (18), как и (19) при использовании (20) и (21), состоит из двух однотипных подзадач: с помощью первой определяется решение y_1^{n+1} , второй – y_2^{n+1} .

Дивекторизация как двойственное применение к решению исходной скалярной задачи векторно-аддитивной методологии позволяет перейти к алгоритму следующего вида:

$$y_1^{n+1}(i, j) - \frac{\sigma \tau c_1(i, j)}{h_{x_1}^\alpha} \sum_{m=0}^{i+1} g_\alpha(m) y_1^{n+1}(i-m+1, j) =$$

$$= F_1^n + \tau f, \quad i = \overline{1, N_{x_1} - 1}, \quad j = \overline{1, N_{x_2} - 1},$$

$$y_2^{n+1}(i, j) - \frac{\sigma \tau c_2(i, j)}{h_{x_2}^\beta} \sum_{m=0}^{j+1} g_\beta(m) y_2^{n+1}(i, j-m+1) =$$

$$= F_2^n + \tau f, \quad i = \overline{1, N_{x_1} - 1}, \quad j = \overline{1, N_{x_2} - 1},$$

причем для реализации по методу (18) величина $F_1^n (\zeta = 1; 2)$ выражается через \tilde{y} и (20), (21), по методу (19) – через $y_{\gamma 0}$ ($\gamma_0 = 1; 2$) и (20), (21).

Численная реализация алгоритма осуществляется параллельно в два этапа:

1) поиск численных решений y_1 по каждому фиксированному горизонтальному направлению $x_2 = x_2(k)$ при $k = \overline{1, N_{x_2} - 1}$ в точках $x_1(i)$ для $i = \overline{1, N_{x_1} - 1}$;

2) поиск численных решений y_2 по каждому фиксированному горизонтальному направлению $x_1 = x_1(k)$ при $k = \overline{1, N_{x_1} - 1}$ в точках $x_2(j)$ для $j = \overline{1, N_{x_2} - 1}$.

При реализации по горизонтальному направлению $x_2 = x_2(k)$ мы получаем систему $(N_{x_1} - 1)$ линейных уравнений, в которой каждое i -е уравнение является результатом дискретизации в точке $(x_1(i), x_2(k))$ и может быть записано в виде

$$\sum_{m=0}^{i+1} K_{i,m} y_1^{n+1}(m, k) = F_1^n + \tau f, \quad (22)$$

где коэффициенты $K_{i,m}$ для каждого численного решения $y_1^{n+1}(m, k)$ при $i = \overline{1, N_{x_1} - 1}, m = \overline{1, i+1}$ имеют вид

$$K_{i,m} = \begin{cases} -C_{i,m} g_\alpha(i-m+1) & \text{при } m \leq i-1, \\ 1 - C_{i,m} g_\alpha(1) & \text{при } m = i, \\ -C_{i,m} g_\alpha(0) & \text{при } m = i+1 \end{cases}$$

$$\text{при } C_{i,m} = \frac{\sigma \tau c_1(i, k)}{h_{x_1}^\alpha}.$$

В вертикальном направлении реализация алгоритма осуществляется аналогично.

4. Численный эксперимент. Тестовые задачи численно решались с помощью последней версии системы Mathematica 5.1 корпорации Wolfram Research; компиляция осуществлялась на компьютере вида Dell Pentium PC.

При реализации алгоритмов (7), (8) использовались расщепление по двум направлениям x_1, x_2 , $\sigma = 2$ и аппроксимация на равномерной прямоугольной сетке $h_{x_1} = h_{x_2} = h$, причем в схеме (8) за приближенное решение была принята вторая компонента вектор-решения.

Численная погрешность методов определялась по формуле квадратичной погрешности (табл. 1).

Для проверки устойчивости и сходимости алгоритмов (7) и (8) решалась двумерная задача параболического типа

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right) + f(x_1, x_2, t) \quad (23)$$

в конечной прямоугольной области $G: \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ для $0 \leq t \leq T$ при $\lambda = 0.05$.

Начальные $u(0, x_1, x_2) = \left(1 + \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right) \right)^{-1}$ и

граничные условия $y_i|_G = u(x_1, x_2, t)|_{(x_1, x_2) \in G, t=t_n}$ в заданном прямоугольнике.

Точное решение исходной задачи

$$u(t, x_1, x_2) = \left(1 + \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{2\lambda} - \frac{t}{4\lambda}\right) \right)^{-1}.$$

Таблица 1

Алгоритм	$\tau = 0.04,$ $h = 0.04$	$\tau = 0.1,$ $h = 0.1$
(7)	0.007379249	0.01138718
(8)	0.009946057	0.01824933

Эффективность вычислительной способности обсуждаемых методов (7), (8) сравнивалась с такими классическими методами, как предиктор-корректор (ПК) и метод стабилизирующей поправки (СП). Табл. 2 демонстрирует стабильность обсуждаемых алгоритмов при увеличении точек дискретизации временной сетки.

Таблица 2

Алгоритм	$\tau = 0.004$	$\tau = 0.01$
(7)	0.0005115975	0.002168431
(8)	0.0007722998	0.002783770
ПК	0.1056301833	∞
СП	0.0558130341	∞

При решении модельной задачи (23) был получен вид приближенного решения, полностью соответствующий задачам параболического типа (рис. 1). На рис. 2 и 3 представлены срезы известного аналитического решения (—) и полученного численного решения (●●●) с использованием численного метода (7) и (8) соответственно.

Ниже представлены результаты решения дифференциального уравнения дробного порядка в частных производных с переменными коэффициентами в единичном квадрате $G: \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ для $0 \leq t \leq T$ следующего вида:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = c_1(x_1, x_2) \frac{\partial^{1.9} u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^{1.9}} + c_2(x_1, x_2) \frac{\partial^{1.6} u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^{1.6}} + f(x_1, x_2, t)$$

с начальным $u(x_1, x_2, 0) = x_1^{2.9} x_2^{2.6}$ и граничными условиями $u(0, x_2, t) = u(x_1, 0, t) = 0, u(1, x_2, t) = x_2^{2.6} e^{-t}, u(x_1, 1, t) = x_1^{2.9} e^{-t}$, при условии, что $c_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 x_2^{1.4}}{\Gamma(3.9)}, c_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^{1.1} x_2^3}{\Gamma(3.6)}, f(x_1, x_2, t) = -(1 + 2 x_1^{1.1} x_2^{1.4}) e^{-t} x_1^{2.9} x_2^{2.6}; u(x_1, x_2, t) = x_1^{2.9} x_2^{2.6} e^{-t}$ — аналитическое решение задачи.

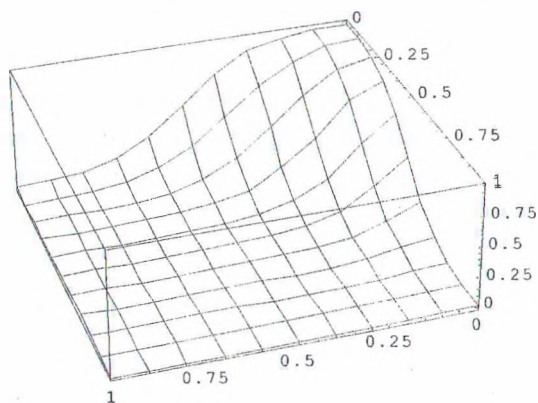


Рис. 1. Поверхность численного решения $\bar{y}(x_1, x_2, 1)$, полученная при использовании алгоритма (8)

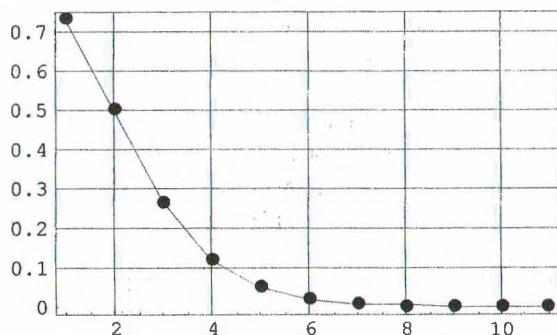


Рис. 2. Срезы аналитического $u(x_1, x_2, 1)$ и приближенного $\bar{y}(x_1, x_2, 1)$ решений, полученные по алгоритму (7)

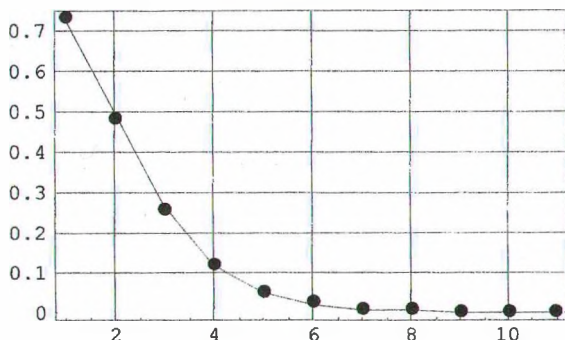


Рис. 3. Срезы аналитического $u(x_1, x_2, 1)$ и приближенного $y_2(x_1, x_2, 1)$ решений, полученные по алгоритму (8)

В табл. 3 включены значения погрешностей ε_1 , определенные как разность между аналитическим и приближенным решениями, и ε_2 , вычисленные как разность между компонентами y_1^{n+1} , y_2^{n+1} вектор-решения. Полученные значения погрешности ε_1 метода (7) демонстрируют стабильную работу алгоритма как на крупных, так и на мелких сетках; результат ε_2 отражает соответствие метода (7) основному требованию векторно-аддитивных схем $|y_1^{n+1} - y_2^{n+1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (табл. 3).

Таблица 3

(τ, h)	(0.1, 0.1)	(0.05, 0.05)	(0.025, 0.025)
ε_1	$1,89 \cdot 10^{-5}$	$2,213 \cdot 10^{-9}$	$6,248 \cdot 10^{-18}$
ε_2	$1,21 \cdot 10^{-6}$	$1,479 \cdot 10^{-10}$	$2,877 \cdot 10^{-19}$

Заключение. Дивекторизация как процесс расщепления при построении математической модели позволяет строить алгоритмы, обладающие полной аппроксимацией, безусловно устойчивые [8 и см. цитируемую там литературу] и достаточно эффективные при реализации.

Результаты численного эксперимента иллюстрируют теоретические характеристики обсуждаемых методов. Теоретический анализ [8, 9] и численный эксперимент показывают пригодность дивекторизации численной модели расщепления как для решения многомерных задач математической физики, так и для класса задач с дифференциальными уравнениями дробного порядка в частных производных с переменными коэффициентами на конечной области, к которым сводятся многие задачи финансов, эпидемиологии, гидрологии и т. д. [10, 13].

Автор выражает благодарность зав. кафедрой высшей математики и математической физики БГУ Н. Г. Абрашина-Жадаевой за постановку задачи и конструктивные замечания при написании данной работы.

Литература

1. Самарский, А. А. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем / А. А. Самарский // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 165, № 6. – С. 1253–1256.
2. Марчук, Г. И. Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления /

Г. И. Марчук, Н. Н. Яненко // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 6. – С. 196–201.

3. Douglas, J. A general formulation of alternating direction methods / J. Douglas, J. Gunn // Num. Math. – 1964. – Vol. 6. – P. 428–453.

4. Peaceman, D. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D. Peaceman, H. Rachford // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1955. – Vol. 3. – P. 28–42.

5. Абрашин, В. Н. Разностные схемы для задач математической физики в области произвольной формы / В. Н. Абрашин, Н. Г. Жадаева // Дифференциальные уравнения и их применения. – 1988. – Вып. 43. – С. 22–30.

6. Абрашин, В. Н. Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики / В. Н. Абрашин // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 314–323.

7. Жадаева, Н. Г. Многокомпонентный метод переменных направлений для эволюционных задач / Н. Г. Жадаева // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 7. – С. 1218–1230.

8. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Многокомпонентные схемы векторного расщепления для решения многомерных задач математической физики / Н. Г. Абрашина-Жадаева, Н. С. Романова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 883–894.

9. Abrashina-Zhadaeva, N. G. Numerical modeling of mixed problem for multidimensional equations of mathematical physics / N. G. Abrashina-Zhadaeva, N. S. Romanova // Mathem. Modeling and Anal. (in published).

10. Meerschaert, M. M. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations / M. M. Meerschaert, C. Tadjejan // Applied numerical math. – 2006. – Vol. 56, № 1. – P. 114–118.

11. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

12. Романова, Н. С. Дивекторизация численной модели расщепления для уравнений в частных производных дробных порядков / Н. С. Романова // Вести ИСЗ (в печати).

13. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order / V. E. Lynch [et al.] // J. computational physics. – 2003. – Vol. 192, № 2. – P. 406–421.