УДК 517.925.6

Е. Я. Кричавец, ассистент; В. И. Мататов, доцент (БГУ)

К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

This paper concerns the problem of the movable singularities of autonomous nonlinear second order systems of differential equations. Authors result the review of last scientific publications of some precedent years on the given problem. Considering systems of two differential equations are reduced to one differential equation of the second order of the form $y'' = R(y, y')$, where R – rational function of its arguments. The method of comparison of this equation with the canonical equations Painleve – Gamb'e gives the possibility to obtain the sufficient conditions under which the movable singular points of the initial systems are the unique poles. In the course of a study is received the representation of the solutions of that systems in the form Laurent series.

Введение. Исследование особых точек решений обыкновенных дифференциальных уравнений – одна из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений [1–4]. Большое значение (как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений) имеют вопросы, связанные с исследованием подвижных особых точек нелинейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Под выражением *подвижные особые точки* дифференциальных уравнений или систем таких уравнений будем понимать особые точки, положение которых в плоскости независимой комплексной переменной зависит от начальных данных [1–6].

В 1967 г. в статье [7] были изучены подвижные особенности неавтономных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений «перекрестного типа»:

$$\frac{dx}{dz} = R_1(z,y), \quad \frac{dy}{dz} = R_2(z,x),$$

где $R_1(z,y)$, $R_2(z,x)$ – рациональные функции вторых аргументов с голоморфными по z коэффициентами. Были получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых обе компоненты решения $x(z)$, $y(z)$ не содержат подвижных многозначных особых точек.

В работе [8] показано, что автономная нелинейная система с гамильтонианом $H(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P, Q – взаимно простые полиномы, может иметь в плоскости независимой комплексной переменной только алгебраические подвижные особенности.

Статья [9] посвящена исследованию подвижных особых точек неавтономной системы второго порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 xy + \gamma_5 y^2}{\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 y}, \end{cases}$$

где коэффициенты системы $\alpha_0 = \alpha_0(z)$, ..., $\delta_0 = \delta_0(z)$ – голоморфные функции в области D. В ней получены условия на коэффициенты системы, при которых ее решения выражаются:

1) либо через элементарные функции;
2) либо через эллиптические функции;
3) либо через функции-решения линейных уравнений;
4) либо через функции-решения первого или третьего (при $\alpha = \gamma = 0$) уравнений Пенлеве.

Неавтономные системы дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными правыми частями по зависимым переменным исследованы в работе [10]. Используя метод малого параметра и условие гамильтоновости, были выделены классы систем, обладающих свойством Пенлеве, т. е. имеющих в комплексной плоскости в качестве подвижных особых точек только однозначные полюсы.

Основная часть. В настоящей работе рассматривается автономная нелинейная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4 y^2}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}, \end{cases} \tag{1}$$

где $z \in D \subset C$, $(x, y) \in \bar{C}^2$, $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$, α_0, ..., γ_2 – комплексные постоянные, причем $\alpha_5 \neq 0$. Эта система получается при исследовании более общей системы дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 xy + \gamma_5 y^2}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}. \end{cases}$$

Найдем коэффициентные условия того, что система (1) обладает свойством Пенлеве.

Выразим из второго уравнения системы (1) компоненту $x(z)$:

$$x = \frac{-\gamma_0 - \gamma_2 y - \alpha_4 y^2 + \beta_0 y' + \beta_2 y y'}{-\beta_1 y' + \gamma_1 + \alpha_3 y}. \qquad (2)$$

Применяя метод исключения, перейдем от системы (1) к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = \beta_1 A_3(y)(y')^3 + {} \\ + A_2(y)(y')^2 + A_1(y)y' + A_0(y), \qquad (3)$$

где коэффициенты рациональных функций $A_3(y)$, $A_2(y)$, $A_1(y)$, $A_0(y)$ определенным образом выражаются через коэффициенты системы (1).

В работах Пенлеве и Гамбье указаны необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей в решениях уравнений типа (3). В результате их исследований было выделено 50 видов уравнений, решения которых имеют в качестве подвижных особых точек только полюсы [1–2].

Итак, первым условием, при котором (3) обладает свойством Пенлеве, будет равенство нулю коэффициента β_1. Это следует из теории уравнений Пенлеве – Гамбье. Согласно этой теории, если уравнение (3) имеет подвижные особые точки не сложнее полярных, то необходимо, чтобы правая часть этого уравнения была полиномом степени не выше второй относительно y'. При этом уравнение (3) примет следующий вид:

$$y'' = B_2(y)y'^2 + B_1(y)y' + B_0(y), \qquad (4)$$

где $B_2(y) = \dfrac{\beta_0\gamma_1(2\alpha_3\beta_0 - \beta_2\gamma_1) + (2\alpha_3^2\beta_0^2 + 2\alpha_3\beta_0\beta_2\gamma_1 - \beta_2^2\gamma_1^2)y + 3\alpha_3^2\beta_0\beta_2 y^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 y^3}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2}$,

$$B_1(y) = \frac{\beta_0\gamma_1(-3\alpha_3\gamma_0 + \gamma_1(\alpha_1 + \gamma_2)) + \alpha_3\beta_2(\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_4\gamma_1 - 2\alpha_3\gamma_2)y^3}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} +$$

$$+ \frac{-3\alpha_3^2\beta_0\gamma_0 + \alpha_3\gamma_1(2\alpha_1\beta_0 - 3\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2) + \gamma_1{}^2(3\alpha_4\beta_0 + \beta_2(\alpha_1 + \gamma_2))}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} y +$$

$$+ \frac{3\alpha_4\beta_2\gamma_1^2 + \alpha_1\alpha_3(\alpha_3\beta_0 + 2\beta_2\gamma_1) - \alpha_3^2(3\beta_2\gamma_0 + 2\beta_0\gamma_2) + \alpha_3\gamma_1(3\alpha_4\beta_0 - \beta_2\gamma_2)}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} y^2,$$

$$B_0(y) = \frac{\gamma_1(\alpha_3\gamma_0^2 - \alpha_1\gamma_0\gamma_1 + \alpha_0\gamma_1^2) +}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} +$$

$$+ \frac{+\alpha_3^2\gamma_0^2 + \alpha_3\gamma_1(-2\alpha_1\gamma_0 + 3\alpha_0\gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2) + \gamma_1^2(-\alpha_4\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} y +$$

$$+ \frac{\alpha_3\gamma_1(3\alpha_0\alpha_3 + \gamma_2^2) + \gamma_1^2(3\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5\gamma_1) + \gamma_2(2\alpha_3^2\gamma_0 - \alpha_4\gamma_1^2) - \alpha_1(\alpha_3^2\gamma_0 + \alpha_4\gamma_1^2 + 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2)}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} y^2 +$$

$$+ \frac{\alpha_0\alpha_3^3 - \alpha_4^2\gamma_1^2 + \alpha_3\gamma_1(-2\alpha_1\alpha_4 + 3\alpha_5\gamma_1) + \alpha_3^2(\alpha_4\gamma_0 + 3\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 + \gamma_2^2)}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2} y^3 +$$

$$+ \frac{\alpha_3(\alpha_2\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_4^2 - 3\alpha_3\alpha_5)\gamma_1 + \alpha_3\alpha_4\gamma_2)y^4 + \alpha_3^3\alpha_5 y^5}{(\beta_0\gamma_1 + (\alpha_3\beta_0 + \beta_2\gamma_1)y + \alpha_3\beta_2 y^2)^2}.$$

Проведя сравнение дифференциального уравнения (4) с каноническими уравнениями Пенлеве – Гамбье, дающее условия полярности подвижных особенностей компоненты $y(z)$ и компоненты $x(z)$, убеждаемся, что уравнение (4) можно привести к каноническими уравнениям [1–2]:

$$y'' = 6y^2, \qquad \text{(II)}$$

$$y'' = 6y^2 + \frac{1}{2}, \qquad \text{(III)}$$

$$y'' = -3yy' - y^3 + q(y' + y^2) \qquad \text{(VI)}$$

и только к ним.

Пусть выполняются следующие условия:

$$\alpha_5 \neq 0,\ \beta_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0,\ \alpha_1 + \gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0,\ \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = 0, \qquad (5)$$

$$\alpha_5\gamma_1 + 6\beta_0^2 = 0,\ \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1 = 0.$$

Тогда уравнение (4) приводится к дифференциальному уравнению $y'' = 6y^2$, которое интегрируется в эллиптических функциях [1, 11]. Легко показать, что решение уравнения (4) при условиях (5) представляется рядом Лорана:

$$y = \frac{1}{(z - c_1)^2} + \frac{c_2}{28}(z - c_1)^4 + \ldots, \qquad (6)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные [9].

Далее предполагаем, что выполняются условия (5). На основании формулы (2) и разложения (6) будем иметь представление компоненты $x(z)$ в виде ряда Лорана:

$$x = \frac{-2\beta_0}{\gamma_1(z - c_1)^3} + \frac{-\gamma_2}{\gamma_1(z - c_1)^2} + \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{c_2\beta_0}{7\gamma_1}(z - c_1)^3 + \ldots$$

Аналогично исследуется система (1) при сравнении дифференциального уравнения (4) с каноническими уравнениями (II), (VI).

В результате проведенного исследования имеет место утверждение.

Теорема. Пусть выполняется одна из трех серий ниже следующих условий:

1) $\alpha_5 \neq 0,\ \beta_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0,\ \alpha_1 + \gamma_2 = 0,$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0,\ \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_5\gamma_1 - 6\beta_0^2 = 0,\ \alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 = 0;$$

2) $\alpha_5 \neq 0,\ \beta_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0,\ \alpha_1 + \gamma_2 = 0,$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0,\ \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_5\gamma_1 - 6\beta_0^2 = 0,\ \alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 = \frac{\beta_0^2}{2};$$

3) $\alpha_5 \neq 0,\ \alpha_4 \neq 0,\ \beta_0 \neq 0,\ \gamma_2 \neq 0,$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) обладает свойством Пенлеве, т. е. имеет в комплексной плоскости в качестве подвижных особых точек только однозначные полюсы.

Заключение. Рассматриваемая в данной статье автономная нелинейная система двух дифференциальных уравнений сводится к дифференциальному уравнению второго порядка вида $y'' = R(y, y')$, где R – рациональная функция своих аргументов. Метод сравнения этого уравнения с каноническими уравнениями Пенлеве – Гамбье дает возможность получить условия полярности подвижных особых точек исходной системы.

Литература

1. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 718 с.

2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

3. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.

4. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

5. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 478 с.

6. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 359 с.

7. Яблонский, А. И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 468–478.

8. Мататов, В. И. О характере подвижных особых точек некоторых систем Гамильтона / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 1502–1503.

9. Кричавец, Е. Я. О подвижных особенностях систем двух дифференциальных уравнений с рациональными правыми частями специального вида / Е. Я. Кричавец, В. И. Мататов // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2000. – № 2. – С. 83–86.

10. Мататов, В. И. Об условиях однозначности подвижных особых точек у одной системы дифференциальных уравнений / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 11. – С. 2092–2094.

11. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.