УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, доцент

О ВЛИЯНИИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Boundary problems with a small parameter near the highest derivative are investigated. A method reduced a boundary problem to the set of the Cauchy problems is proposed. Different locations of boundary layers are considered.

Введение. Повышенный интерес к вопросу о построении и исследовании вычислительных алгоритмов для решения граничных задач с пограничными слоями связан с многочисленными приложениями этих задач. Область применения граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями все время расширяется: они широко распространены в механике, физике, динамике жидкостей и т. д. Эти задачи очень сложны в вычислительном отношении, кроме того, они требуют более детальной информации о поведении решения. Для этих задач нужны методы с хорошими возможностями настройки и регулировки вычислений и с более общими предположениями на входные данные задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных о. д. у. второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной

$$-\varepsilon y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

с пограничным слоем и граничными условиями следующего вида:

$$A_1 y'(\alpha) + A_2 y(\alpha) = a, \quad (2)$$

$$B_1 y'(\beta) + B_2 y(\beta) = b. \quad (3)$$

Предположим, что $A(x), B(x)$ – произвольные квадратные матрицы порядка ($n \times n$), элементы которых кусочно-непрерывные функции, зависящие от x, f: $[\alpha, \beta] \to C^n$; A_1, A_2, B_1, B_2 – известные квадратные матрицы порядка ($n \times n$) такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют $\mathrm{rang}[A_1, A_2] = n$ и $\mathrm{rang}[B_1, B_2] = n$. Требуется определить функцию $y: [\alpha, \beta] \to C^n$ так, чтобы выполнялись равенства (1)–(3). Роль малого параметра ε естественным образом транслируется через решение граничной задачи.

Для численного решения системы о. д. у. второго порядка вида (1) с пограничным слоем и граничными условиями вида (2), (3) предлагается модификация метода унитарной прогонки [1].

Алгоритм модификации метода унитарной прогонки. 1. Предположим, что пограничный слой для системы линейных о. д. у. имеет место на левом конце отрезка $[\alpha, \beta]$.

Введем регулирующие множители $M_1(x, \varepsilon)$ и $M_2(x, \varepsilon)$ и будем рассматривать далее вместо $y(x)$ и $y'(x)$ – преобразованные вектор-функции $M_1(x, \varepsilon) y(x)$ и $M_2(x, \varepsilon) y'(x)$.

Определим начальные значения в точке $x = \beta$ для матриц $W_1(x)$, $W_2(x)$ и вектора $r(x)$. Граничное условие (3) представим в виде

$$(g_i, z(\beta)) = \beta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $g_i = (g_{i1}^{(1)}, \ldots, g_{in}^{(1)}, g_{i2}^{(2)}, \ldots, g_{in}^{(2)})^T$,

$$z(\beta) = \begin{bmatrix} M_2 y'(\beta) \\ M_1 y(\beta) \end{bmatrix}.$$

Используя для условий (4) ортонормирование по Шмидту, приведем все условия (4) к виду

$$(v_i, z(\beta)) = \gamma, i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{\|u_{k+1}\|}\left(\beta_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (g_{k+1}, v_i)\gamma_i\right), \ k = \overline{0, n-1}.$$

Линейные комбинации вида (5) можно записать в матричной форме

$$V_1 M_2(\varepsilon, \beta) y'(\beta) + V_2 M_1(\varepsilon, \beta) y(\beta) = \gamma. \quad (6)$$

Начальные условия при этом будут иметь вид

$$W_1(\beta) = V_1^*, \quad (7)$$

$$W_3(\beta) = V_2^*. \quad (8)$$

Таким образом, будут определены значения матриц $W_1(\beta)$, $W_3(\beta)$ и значение вектора $r(\beta)$:

$$r(\beta) = \gamma. \quad (9)$$

Итак, решая систему матричных уравнений при начальных условиях (7), (8), на всем отрезке $\beta \le x \le \alpha$ будем находить плавно меняющиеся матрицы $W_1(x)$ и $W_3(x)$. Вектор $r(x)$ найдем как решение задачи Коши с начальными условиями в точке $x = \beta$. Этим будет завершена прогонка правого граничного условия. В точке $x = \alpha$ получим

$$W_1^*(\alpha) M_2(\varepsilon) y'(\alpha) + W_3^*(\alpha) M_1(\varepsilon) y(\alpha) = r(\alpha).$$

В форме скалярных произведений последнее выражение примет вид

$$(C_i, z(\alpha)) = \delta_i, i = \overline{1, n}, \qquad (10)$$

где δ – i-я координата вектора $r(\alpha)$.

Одновременно с формулой (10) будем рассматривать второе граничное условие исходной системы вида (1). Известно, что ранг матрицы

$$\Omega_\alpha = \begin{bmatrix} W_1^*(\alpha) & W_3^*(\alpha) \\ A_1 M_2^{-1}(\varepsilon, \alpha) & A_2 M_1^{-1}(\varepsilon, \alpha) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

равен $2n$, следовательно,

$$\det \Omega_\alpha \neq 0. \qquad (12)$$

В конечной точке отрезка при расположении пограничного слоя на левом конце получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно построенных конструкций

$$M_2(x, \varepsilon) y'(x) \text{ и } M_1(x, \varepsilon) y(x), \ \Omega_\alpha z(\alpha) = \omega_\alpha,$$

$$\omega_\alpha = \begin{bmatrix} r(\alpha) \\ a \end{bmatrix}.$$

Условие (12) равносильно однозначной разрешимости этой системы, а значит, и исходной системы с одним пограничным слоем и с малым параметром при старшей производной вида (1)–(3).

Запишем второе граничное условие вида (3) в эквивалентном виде:

$$(P_{n+k+1}, z(\alpha)) = \delta_{n+k+1}, k = \overline{0, n-1}, \qquad (13)$$

где $\delta_{n+k+1} = a_{k+1}$, а P_{n+k+1} определяются по матрицам A_1 и A_2 аналогично, как и в методе правой унитарной прогонки [2]. На основе линейных комбинаций вида (10) выполним процесс ортонормирования по Шмидту линейных комбинаций вида (13). Получим

$$(C_{n+k+1}, z(\alpha)) = \varepsilon_{n+k+1}, k = \overline{0, n-1}, \qquad (14)$$

где векторы C_i удовлетворяют условию

$$(C_i, C_j) = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, 2n}. \qquad (15)$$

Последнее условие перепишем в виде

$$V_3 M_2(\varepsilon, \alpha) y'(\alpha) + V_4 M_1(\varepsilon, \alpha) y(\alpha) = \eta. \qquad (16)$$

Начальные условия для матриц $W_2(\alpha)$, $W_4(\alpha)$ и вектора $s(\alpha)$ получим в виде

$$W_2(\alpha) = V_3^*, \qquad (17)$$

$$W_4(\alpha) = V_4^*, \qquad (18)$$

$$s(\alpha) = \eta. \qquad (19)$$

Теперь можно определить матрицы $W_2(x)$, $W_4(x)$ и вектор-функцию $s(x)$ как решения задач Коши с полученными начальными условиями вида (17)–(19). Итак, вместо исходной граничной задачи решаем задачи Коши, для которых в настоящее время существуют известные и хорошо работающие методики [2].

Окончательно решение искомой задачи вида (1)–(3) с пограничным слоем, расположенным на левом конце отрезка $[\alpha, \beta]$, вычислим по формулам

$$y(x) = M_1^{-1}(x, \varepsilon)[W_3(x) r(x) + W_4(x) s(x)],$$

$$y'(x) = M_2^{-1}(x, \varepsilon)[W_1(x) r(x) + W_2(x) s(x)],$$

$$\alpha \leq x \leq \beta.$$

2. Рассмотрим систему линейных о. д. у. (1) с граничными условиями вида (2), (3) с малым параметром при старшей производной $\varepsilon > 0$ и с двумя пограничными слоями, расположенными на границах отрезка.

Введем следующие обозначения. Регулирующие множители для пограничного слоя в точке $x = \alpha$ обозначим через $M_1^{(1)}(x)$, $M_2^{(1)}(x)$, а в точке $x = \beta$ – через $M_1^{(2)}(x)$, $M_2^{(2)}(x)$. Перенося граничные условия из точки $x = \alpha$ в точку $x = x_0$ и из точки $x = \beta$ в точку $x = x_0$, получим следующие функциональные соотношения:

$$W_1^{(1)*}(x) M_2^{(1)} y'(x) + W_3^{(1)*}(x) M_1^{(1)} y(x) = r^{(1)},$$

$$\alpha \leq x \leq x_0,$$

$$W_1^{(2)*}(x) M_2^2 y'(x) + W_3^{(2)*}(x) M_1^{(2)} y(x) = r^{(2)},$$

$$\beta \geq x \geq x_0.$$

Составим матрицу

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} W_1^{(1)*}(x_0) M_2^{(1)}(x_0) & W_3^{(1)*}(x_0) M_1^{(1)}(x_0) \\ W_1^{(2)*}(x_0) M_2^{(2)}(x_0) & W_3^{(2)*}(x_0) M_1^{(2)}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Так как выполняется условие

$$\det \Omega_0 \neq 0,$$

то однозначная разрешимость исходной граничной задачи гарантирована.

В случае наличия двух пограничных слоев исходная граничная задача разбивается на две самостоятельные задачи. Эти задачи будут связаны между собой граничными условиями и определены на различных отрезках $[\alpha, x_0]$ и $[x_0, \beta]$. Каждая из граничных задач решается по предложенным выше модификациям метода унитарной прогонки. При этом учитывается, где находится пограничный слой: на левом конце отрезка или на его правом конце.

Затем, каждая граничная задача переходит в совокупность задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Благодаря введению в решение и в градиент решения регулирующих множителей векторфункций $M_1(x,\varepsilon)$ и $M_2(x,\varepsilon)$ вблизи пограничных слоев рост решения и градиентов решения нейтрализуется.

Заключение. Предложенная модификация метода унитарной прогонки достаточно перспективна для решения граничных задач с различным расположением пограничных слоев. Она позволяет обойти сложную процедуру решения линейных алгебраических уравнений.

В предложенной модификации метода унитарной прогонки практически отсутствуют какие-либо специальные ограничения на правую часть f, вид граничных условий g и области интегрирования $[a, b]$.

Имеют место самые сложные случаи, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, осцилляциями, резкими перепадами, в частности, наблюдаются и разрывы первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе эксперимента.

На систему не окажет особого влияния и перемена методов решения задач Коши. А для решения задач Коши в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо разработанных методик [2].

Литература

1. Соловьева, И. Ф. Решение систем линейных о. д. у. второго порядка с различными расположениями пограничных слоев / И. Ф. Соловьева // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 1999. – Вып. VII. – С. 24–29.

2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М., 1983. – 200 с.