УДК 512.812.4

Н. П. Можей, доцент

ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The paper is devoted to the description of torsion-free connections in the three-dimensional projective space with the stabilizer of dimension not less than four. The description is based on a finding of enclosed pairs. In this case the pair of Lie algebras locally determines homogeneous space. We describe all possible curvature tensors. The classification task consists of description up to the equivalence of triples (g, g_0, w), where (g, g_0) is a pair of Lie algebras, w is a Cartan connections. The decision is based on studying of natural action of group GL (3, R) and the description of its orbits. The offered technique can be used for space of any dimension.

Введение. Связности Картана впервые появились в работах Эли Картана под названием обобщенные пространства. Современное определение связностей Картана дано в работах [1, 2]. Классическими примерами связностей Картана являются аффинные, конформные и проективные связности (см. [1]). Локально однородные аффинные и проективные связности в случаях малой размерности или достаточно большой алгебры симметрий исследовались Егоровым и его учениками [3]. Ряд результатов по локально однородным аффинным связностям можно найти в работе [4]. Проведем описание проективных связностей в трехмерном пространстве.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие размерности 3, на котором транзитивно действует группа G, G_0 – стабилизатор произвольной точки o.

Пусть g – алгебра Ли группы G, а g_0 – подалгебра, соответствующая подгруппе G_0. Тогда многообразие может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов G/G_0, а касательное пространство T_0M – с фактор-пространством g/g_0 (см., например, [5]). Тогда (g, g_0) – соответствующая пара алгебр Ли.

Связностью Картана типа (q, q_0) на паре алгебр Ли (g, g_0) называется линейное отображение $w: g \to q$ такое, что

– $w(g_0) \subset q_0$;

– индуцированное отображение

$$\overline{w}: g/g_0 \to q/q_0,$$

$$x + g_0 \mapsto w(x) + q_0 \quad (x \in g)$$

является изоморфизмом векторных пространств;

– $w([x,y]) = [w(x), w(y)]$ для всех $x \in g_0$, $y \in g$.

Тензором кривизны связности Картана w называется отображение

$$\Omega: \Lambda^2(q/q_0) \to q,$$

однозначно определенное из равенства

$$\Omega(\overline{w}(x+g_0), \overline{w}(y+g_0)) =$$

$$= w([x,y]) - [w(x), w(y)]$$

для всех $x, y \in g$.

Хорошо известно (см., например, [6]), что инвариантные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимнооднозначном соответствии со связностями на паре (g, g_0).

Пара алгебр Ли (g, g_0) называется вложенной в пару (q, q_0), если g есть подпространство пространства q и каноническое вложение $g \to q$ является связностью Картана типа (q, q_0) на паре (g, g_0). Тензором кривизны вложенной пары называется тензор кривизны связности Картана. Т. е. пара (g, g_0) является вложенной в пару (q, q_0), если g есть подпространство в q и при этом

– $g_0 = g \cap q_0$;

– $g + q_0 = q$;

– $[x,y]_g = [x,y]_q$ для всех $x \in g$, $y \in g_0$.

Тензор кривизны позволяет однозначно восстановить умножение в g по умножению в q:

$$[x,y]_g = [x,y]_q + \Omega(x+q_0, y+q_0)$$

для всех $x, y \in g$.

С точностью до эквивалентности связностей Картана всегда можно предполагать, что пара (g, g_0) вложена в пару (q, q_0), а связность Картана есть каноническое вложение g в q.

Опишем все максимально вложенные пары (g, g_0) в (q, q_0). Сначала опишем все тензоры кривизны. Пусть Q – группа преобразований проективного пространства, тогда

$$q = sl(4,R) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} Y & X \\ Z^t & -trY \end{pmatrix} \middle| X, Z \in R^3,\ Y \in gl(3,R) \right\},$$

$$q_0 = \left\{ \begin{pmatrix} Y & 0 \\ Z^t & -trY \end{pmatrix} \middle| Z \in R^3,\quad Y \in gl(3,R) \right\},$$

где (q, q_0) – пара алгебр Ли; W – некоторое подпространство пространства $\mathrm{Hom}(\Lambda^2(q/q_0), q)$ всех тензоров кривизны. Отождествим q/q_0 с

$$V = R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in R^3 \right\}.$$

Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – стандартный базис в $V = R^3$ и $\{e^1, e^2, e^3\}$ – дуальный базис в V^*. Рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V))$ и запишем каждый его элемент α в координатах

$$\alpha = \alpha^l_{ijk},$$

где

$$\alpha(e_i \Lambda e_j) = \sum\nolimits_{1\le k,l\le 3} \alpha^l_{ijk}\, e^k \otimes e_l.$$

Определим подпространство $\widetilde{W}$ в $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V))$ как множество элементов α, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha^l_{jik} = -\alpha^l_{ijk};$$

$$\alpha^l_{ijk} + \alpha^l_{jki} + \alpha^l_{kij} = 0;$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{3} \alpha^l_{ijk} = 0$$

для всех $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Тогда подпространство

$$W \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 (q/q_0), q)$$

определяется следующим образом:

$$W = \Big\{\Omega :\ X_1 \wedge X_2 \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} \alpha(X_1, X_2) & 0 \\ \beta(X_1, X_2) & -tr\alpha(X_1, X_2) \end{pmatrix} \Big|\, \alpha \in \widetilde{W} \Big\}.$$

Классифицируем с точностью до эквивалентности все тройки (g, g_0, w) такие, что (g, g_0) – пара алгебр Ли, $w : g \to q$ – связность Картана типа (q, q_0), тензор кривизны связности w лежит в W и образ w – максимально вложенная пара.

Построим изоморфизм

$$\lambda : \Lambda^2 V \to V^*,$$

$$\lambda(v_1 \Lambda v_2)(v_3) = (v_1 \Lambda v_2 \Lambda v_3)/w,$$

где $w = e_1 \Lambda e_2 \Lambda e_3$.

Получаем

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V)) \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(V^*, gl(V)) =$$

$$= V \otimes gl(V) = V \otimes V^* \otimes V.$$

При этом элементам подпространства W в $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V))$ (т. е. удовлетворяющим условиям 1–3) соответствуют только элементы

$$S^2 V \otimes V^* = \mathrm{Hom}(S^2 V^*, V^*) \subset V \otimes V^* \otimes V.$$

Зафиксируем базис пространства

$$W \subset S^2 V \otimes V^*$$

(размерность этого пространства равна 15).

f_1: $e_{(11)}{}^1 - 2e_{(13)}{}^3$; f_2: $e_{(11)}{}^2$;

f_3: $e_{(11)}{}^3$; f_4: $2e_{(12)}{}^1 - 2e_{(23)}{}^3$;

f_5: $2e_{(12)}{}^2 - 2e_{(13)}{}^3$; f_6: $2e_{(12)}{}^3$;

f_7: $2e_{(13)}{}^1 - e_{(33)}{}^3$; f_8: $2e_{(13)}{}^2$;

f_9: $e_{(22)}{}^1$; f_{10}: $e_{(22)}{}^2 - 2e_{(23)}{}^3$;

f_{11}: $e_{(22)}{}^3$; f_{12}: $2e_{(23)}{}^1$;

f_{13}: $2e_{(23)}{}^2 - e_{(33)}{}^3$; f_{14}: $e_{(33)}{}^1$;

f_{15}: $e_{(33)}{}^2$.

Здесь через $e_{(ij)}{}^k$ обозначена операция симметрирования

$$e_{(ij)}{}^k = \frac{1}{2!}(e_{ij}{}^k + e_{ji}{}^k).$$

Далее отображение $gl(3, R) \to gl(15, R)$ будем обозначать r.

Найдем действие на пространстве $\widetilde{W}$ (в базисе $f_1 - f_{15}$), а также подпространство всех тензоров, инвариантное относительно этого действия. Подробнее эта процедура изложена в работе [7]. Выпишем список подпространств пространства $\widetilde{W}$, для которых стабилизатор действия имеет размерность не менее 4.

1. $\langle f_3 \rangle$ $\quad \begin{pmatrix} x & z & t \\ 0 & y & u \\ 0 & 0 & -(x+3y)/4 \end{pmatrix}$

2. $\langle f_6 \rangle$ $\quad \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & t \\ 0 & 0 & -(x+y)/2 \end{pmatrix}$

3. $\langle f_3 + f_{11} \rangle$ $\quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ -y & x & t \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$

4. $\langle f_7 + f_{13} \rangle$ $\quad \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ z & y & 0 \\ 0 & 0 & -3(x+y)/2 \end{pmatrix}$

Здесь переменные обозначаются буквами x, y, z, t, u и принадлежат R.

Пусть $q_1 = \{x \in q_0 \mid x.\Omega = 0\}$. Рассмотрим подпространства $U \subset q/q_1$ такие, что $\dim U = 3$ и $U + q_0/q_1 = q/q_1$. Опишем действие $Q_1 = \exp(q_1)$, выберем подпространства U, для которых стабилизатор действия имеет размерность не менее 4, и проверим замкнутость относительно умножения

$$[x, y]_g = [x, y]_q + \Omega(x + q_0, y + q_0).$$

Получим искомые тройки (g, g_0, w) такие, что (g, g_0) – пара алгебр Ли, $g = U + q_1$, $g_0 = q_1$, $w : g \to q$ – связность Картана типа (q, q_0):

1.1. $g = \begin{pmatrix} x & z & t & v \\ 0 & y & u & w \\ 0 & 0 & -(x+3y)/4 & s \\ 0 & 0 & 0 & -(3x+y)/4 \end{pmatrix}$,

$g_0 = \begin{pmatrix} x & z & t & 0 \\ 0 & y & u & 0 \\ 0 & 0 & -(x+3y)/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(3x+y)/4 \end{pmatrix}$,

$e_2 \wedge e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 \wedge e_1 \mapsto 0$, $e_1 \wedge e_2 \mapsto 0$.

1.2. $g = \begin{pmatrix} 4x & z & t & s \\ 0 & 4x & u & v \\ 0 & 0 & -4x + aw & w \\ 0 & 0 & bw & -4x - aw \end{pmatrix}$,

$g_0 = \begin{pmatrix} 4x & z & t & 0 \\ 0 & 4x & u & 0 \\ 0 & 0 & -4x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4x \end{pmatrix}$,

$e_2 \wedge e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 \wedge e_1 \mapsto 0$, $e_1 \wedge e_2 \mapsto 0$.

2. $g = \begin{pmatrix} x & 0 & z & u \\ 0 & y & t & v \\ 0 & 0 & aw-(x+y)/2 & w \\ 0 & 0 & bw & -(x+y)/2 - aw \end{pmatrix}$,

$g_0 = \begin{pmatrix} x & 0 & z & 0 \\ 0 & y & t & 0 \\ 0 & 0 & -(x+y)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(x+y)/2 \end{pmatrix}$,

$e_2 \wedge e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 \wedge e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e_1 \wedge e_2 \mapsto 0$.

3. $g = \begin{pmatrix} x & y & z & u \\ -y & x & t & v \\ 0 & 0 & -x + aw & w \\ 0 & 0 & bw & -x - aw \end{pmatrix}$,

$g_0 = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ -y & x & t & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$,

$e_2 \wedge e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 \wedge e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e_1 \wedge e_2 \mapsto 0$.

4. Искомых пар нет.

Здесь переменные обозначаются латинскими буквами x, y, z, t, u, v, w, s и принадлежат R.

Заключение. Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию проективных связностей со стабилизатором любой размерности. Предложенная методика также может быть использована для многообразий произвольной размерности.

Литература

1. Кобаяши, Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяши. – М.: Наука, 1986.
2. Sharpe, R. W. Differential geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program: Graduate Texts in Mathematics / R. W. Sharpe. – Berlin, 1997.
3. Егоров, И. П. Движения в обобщенных пространствах / И. П. Егоров // Сб. науч. тр. / КГУ. – Казань, 1960.
4. Opozda, B. Affine versions of Singer's theorem on locally homogeneous spaces: Ann. Global Anal. Geom. / B. Opozda. – 1997. – P. 187–199.
5. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995.
6. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.
7. Можей, Н. П. Тензоры Вейля трехмерных линейных связностей / Н. П. Можей // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 10–13.