УДК 517.982+330.4

Е. А. Шинкевич, доцент

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

One of the basic concepts of consumer theory and economics theory in general is the concept of preference relation of a consumer on a commodity space. In mathematical economics preference relations are given as binary relations (as a rule, that are preorder relations) on the commodity space. The existence of analytical representations for preference relations is the main problem of utility theory. In this paper we consider preorder relations that are compatible with algebraic operations of addition and scalar multiplication given on the commodity space, introduce the new class of step-linear functions and show that any compatible preorder can be analytical represented by step-linear functions.

Введение. Одним из основных понятий теории потребления и экономической теории в целом является понятие отношения предпочтения потребителя, которое определяется на некотором пространстве товаров.

В математической экономике (см., например, [1], [2]) под отношением предпочтения понимается бинарное отношение (как правило, отношение предпорядка), определенное на множестве товаров. Аналитическое представление отношений предпорядка – это одна из основных задач теории потребления [3].

В настоящей статье рассматриваются отношения предпорядка, определенные на некотором множестве товаров и согласованные с алгебраической структурой этого множества. Как известно [2], [3], отношения предпочтения такого класса могут быть представлены с помощью линейных функций полезности тогда и только тогда, когда они являются архимедовыми.

В предлагаемой статье представлен новый класс ступенчато-линейных функций и показано, что любое отношение предпочтения, согласованное со структурой векторного пространства, может быть задано аналитически с помощью ступенчато-линейных функций.

Ступенчато-линейные функции и пирамиды векторных подпространств. Пусть X – вещественное векторное пространство и пусть $\mathcal{V}$ – совокупность всех векторных подпространств из X. Отношение включения определяет на $\mathcal{V}$ частичный порядок, относительно которого $\mathcal{V}$ – полная решетка, при этом точная верхняя и нижняя грани любого семейства векторных подпространств из $\mathcal{V}$ есть, соответственно, их линейная оболочка и их пересечение. Подсемейство $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ называется *цепью* векторных подпространств, если для любых $L, L' \in \mathcal{L}$ выполняется либо $L \subset L'$, либо $L' \subset L$. Любая цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ – подрешетка в $\mathcal{V}$, однако может не быть полной подрешеткой. Цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$, которая как подрешетка является полной, будем называть *полной цепью*. Наименьшая полная цепь, содержащая заданную цепь $\mathcal{L}$, называется *пополнением цепи* $\mathcal{L}$. Говорят, что цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ *максимальна* в подмножестве $\mathcal{W}$ из $\mathcal{V}$, если $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$, и для любой другой цепи $\mathcal{L}' \subset \mathcal{W}$ включение $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ возможно лишь тогда, когда $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Если подмножество $\mathcal{W}$ является полной подрешеткой в $\mathcal{V}$, то любая цепь, максимальная в $\mathcal{W}$, является полной, но не наоборот.

Пусть E_0 и E – заданные векторные подпространства из X, причем $E_0 \subset E$. Отрезок $[E_0; E] := \{L \in \mathcal{V} | E_0 \subset L \subset E\}$ – полная подрешетка в $\mathcal{V}$ с наименьшим E_0 и наибольшим E элементами. Так как $[E_0; E]$ – полная подрешетка в $\mathcal{V}$, то любая цепь из $[E_0; E]$ обладает в $[E_0; E]$ точной верхней гранью.

Пирамидой векторных подпространств в X назовем любую полную цепь $\mathcal{L}$ из $\mathcal{V}$.

Векторные подпространства

$$E_0 := \bigcap \{L \mid L \in \mathcal{L}\} \text{ и } E := \bigcup \{L \mid L \in \mathcal{L}\}$$

будем называть соответственно *вершиной* и *основанием* пирамиды $\mathcal{L}$. Из свойства полноты следует, что как вершина E_0, так и основание E принадлежат пирамиде.

О любой пирамиде векторных подпространств $\mathcal{L}$ с вершиной E_0 и основанием E будем говорить, что она является пирамидой над E.

Нетрудно заметить, что любая конечная цепь $\mathcal{L} := \{E_0, E_1, \ldots, E_m\}$ из $\mathcal{V}$ – пирамида, при этом если $E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_m$, то E_0 и E_m – вершина и основание пирамиды соответственно.

Любое одноэлементное семейство $\mathcal{L} = \{E\}$ (E – векторное подпространство из X) является пирамидой, у которой вершина и основание совпадают и равны E. Такие пирамиды будем называть *тривиальными*.

Пирамиду векторных подпространств с вершиной E_0 и основанием E назовем *максимальной*, если она является максимальной цепью в $[E_0; E] := \{L \in \mathcal{V} | E_0 \subset L \subset E\}$.

Пусть $\mathcal{L}$ – нетривиальная ($E_0 \neq E$) пирамида над E с вершиной E_0. Каждому $L \in \mathcal{L}$, $L \neq E_0$ поставим в соответствие содержащееся в нем векторное подпространство

$$\bar{L} := \bigcup \{L' \in \mathcal{L} | L' \subset L, L' \neq L\}.$$

Из свойства полноты пирамиды следует, что $\bar{L} \in \mathcal{L}$ и либо $\bar{L}$ совпадает с L, либо $\bar{L}$ непосредственно предшествует L в $\mathcal{L}$.

Вещественнозначную функцию $c: x \to R$ будем называть *ступенчато-линейной*, если над X существует максимальная пирамида векторных подпространств $\mathcal{L}$ такая, что:

($StL1$) $c(x)=0$ в том и только том случае, когда $x \in E_0$, где E_0 – вершина пирамиды $\mathcal{L}$;

($StL2$) для каждого $L \in \mathcal{L}$, $L \neq E_0$ функция

$$x \to l_L(x) := \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \widehat{L}, \\ c(x), \text{ если } x \in L \setminus \widehat{L} \end{cases}$$

является линейной на векторном пространстве L.

Приведем некоторые свойства ступенчато-линейных функций.

Пусть $c: x \to R$ – ступенчато-линейная функция и пусть $\mathcal{L}$ – пирамида векторных подпространств, соответствующая c.

1. $c: x \to R$ является *однородной*, т. е. $c(\alpha x) = \alpha c(x)$ для всех $x \in X$ и всех $\alpha \in R$.

2. Если $L \in \mathcal{L}$, $L \neq E_0$ и $L \neq \widehat{L}$, тогда

а) $c(x+y) = c(x) + c(y)$ для всех x, $y \in L \setminus \widehat{L}$ таких, что $c(x)c(y) > 0$;

б) $c(x+y) = c(x)$ для всех $x \in L$ и всех $y \in \widehat{L}$;

в) $c(x+y) = c(x)$ для всех $x \in L$ и $y \in E_0$.

Двойственная характеризация ступенчато-линейных функций. Пусть $L(X)$ – векторное пространство вещественнозначных линейных функций, определенных на X и $StL(X)$ – класс всех ступенчато-линейных функций, заданных на X.

Семейство $\mathcal{F}$ из $L(X)$ назовем *кортежем линейных функций* на X, если:

а) на $\mathcal{F}$ определено отношение совершенного порядка $\preceq$;

б) для любого $x \in X$ подсемейство

$$\mathcal{F}_x := \{ l \in \mathcal{F} \mid l(x) \neq 0 \}$$

либо пусто, либо имеет наименьший (в смысле $\preceq$) элемент l_x;

в) для любого $l \in \mathcal{F}$ существует $x \in X$ такой, что $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$ и $l = l_x$.

Впервые семейства линейных функций, удовлетворяющие свойствам а) и б), рассматривались Кли в [4]. Термин *кортеж линейных функций* для таких семейств был введен позднее В. В. Гороховиком в [5].

Очевидно, что любое вполне упорядоченное семейство $\mathcal{F}$ из $L(X)$ является кортежем линейных функций на X. Однако не любой кортеж вполне упорядочен.

Конечное семейство $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\} \subset L(X)$ образует кортеж на X тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}$ совершенно упорядочено и линейно независимо.

Теорема 1 [6]. Ненулевая вещественнозначная функция $c: x \to R$ ступенчато-линейна тогда и только тогда, когда существует кортеж линейных функций $\mathcal{F}$ на X такой, что $c(x) = c_F(x)$ для всех $x \in X$, где функция $c_F(x)$ определяется

$$x \to c_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \varnothing, \\ l_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \varnothing. \end{cases}$$

Следствие 1. Если $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ – конечный кортеж линейных функций на X, то соответствующая ему ступенчато-линейная функция $c_F: x \to R$ может быть определена следующим образом:

$$c_F(x) = \begin{cases} l_1(x), & \text{если } l_1(x) \neq 0, \\ l_2(x), & \text{если } l_1(x) = 0, l_2(x) \neq 0, \\ \ldots & \\ l_{m-1}(x), & \text{если } l_i(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m-2, \\ & \qquad l_{m-1}(x) \neq 0, \\ l_m(x), & \text{если } l_i(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Аналитическое представление конических отношений предпорядка. Пусть X – вещественное векторное пространство и пусть $\preceq$ – отношение предпорядка (транзитивное и рефлексивное бинарное отношение) на X.

Отношение предпорядка $\preceq$, определенное на векторном пространстве X, назовем коническим, если:

а) $x \preceq y \Rightarrow \alpha x \preceq \alpha y$ для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in R$, $\alpha > 0$;

б) $x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z$ для всех $x, y, z \in X$.

Теорема 2. Бинарное отношение $\preceq$, определенное на векторном пространстве X, является полным коническим отношением предпорядка на X тогда и только тогда, когда существует ступенчато-линейная функция $c: x \to R$ такая, что

$$x \preceq y \Leftrightarrow c(x-y) \leq 0$$

и

$$x \prec y \Leftrightarrow c(x-y) < 0.$$

Вещественнозначная функция $\varphi: x \to R$ называется сильно $\preceq$-положительной, если

$$\varphi(x) > 0 \text{ для всех } x \text{ таких, что } x \succ 0$$

$$(0 \preceq x,\ x \npreceq 0)$$

и

$$\varphi(x) = 0 \text{ для всех } x \text{ таких, что } x \sim 0$$

$$(0 \preceq x,\ x \preceq 0).$$

Теорема 3. Пусть $\preceq$ – коническое отношение предпорядка, определенное на векторном пространстве X. Тогда

$$x \preceq y \Leftrightarrow c(x-y) \leq 0 \text{ для всех } c \in P^+_{\preceq}$$

и

$$x \prec y \Leftrightarrow c(x-y) < 0 \text{ для всех } c \in P^+_{\preceq},$$

где $c \in P^+_{\preceq}$ – семейство сильно $\preceq$-положительных ступенчато-линейных функций.

Приложения к задачам теории потребления. Пусть пространство товаров X – векторное пространство и пусть отношение предпочтения потребителя является коническим отношением предпорядка $\preceq$.

Пусть $Q \subset X$ – допустимое множество товаров. Товар $x^0 \in Q$ назовем $\preceq$-оптимальным в Q, если в Q не существует товара $\overline{x} \in Q$ такого, что $\overline{x} \prec x^0$ ($y \prec x \Leftrightarrow y \preceq x,\ x \npreceq y$).

Задача теории потребления состоит в том, чтобы для допустимого множества товаров Q и заданного на нем конического отношения предпочтения $\preceq$ найти $\preceq$-оптимальный товар.

Теорема 4. Пусть допустимое множество товаров Q – выпуклое подмножество пространства товаров X. Тогда товар $x^0 \in Q$ является $\preceq$-оптимальным в Q тогда и только тогда, когда существует сильно $\preceq$-положительная ступенчато-линейная функция $c : x \to R$ такая, что

$$c(x - x^0) \geq 0 \text{ для всех } x \in Q.$$

Кортеж линейных функций $\mathcal{F} \subset L(X)$ назовем сильно $\preceq$-положительным, если ступенчато-линейная функция c_F, определенная в теореме 1, является сильно $\preceq$-положительной.

Следствие 2. Пусть допустимое множество товаров Q – выпуклое подмножество пространства товаров X и пусть $\operatorname{co}\dim S_\sim = n < \infty$ ($S_\sim := \{x \in X \mid x \preceq 0, 0 \preceq x\}$). Тогда для того, чтобы товар $x^0 \in Q$ был $\preceq$-оптимальным в Q, необходимо и достаточно, чтобы на X существовал конечный сильно $\preceq$-положительный кортеж линейных функций $\mathcal{F} := \{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$, $1 \leq k \leq n$ такой, что

$$l_i(x^0) = \min_{x \in Q_i} l_i(x),\ i = 1, 2,\ \ldots, k,$$

где $\quad Q_1 = Q, \quad Q_{i+1} = \left\{ y \in X \mid l_i(y) = \min_{x \in Q_i} l_i(x) \right\},$

$i = 1, 2,\ \ldots, k$.

Заключение. Таким образом, в работе представлен новый класс ступенчато-линейных функций и показано, что любое отношение предпочтения, согласованное со структурой векторного пространства, может быть задано аналитически с помощью ступенчато-линейных функций (теорема 4).

Литература

1. Handbook of mathematical economics / K. J. Arrow [eds.]. – Amsterdam, North-Holland. – 1981. – Vol. 2.
2. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор; пер. с анг. Г. И. Жуковой, Ф. Я. Кельмана. – М.: Айрис-пресс, 2002.
3. Fishburn, P. C. Utility theory for decision making / P. C. Fishburn. – New York; London; Sydney; Toronto: Wiley, 1970.
4. Klee, V. L. The structure of semispaces / V. L. Klee // Mathematica Scandinavica. – 1956. – Vol. 1. – P. 56–64.
5. Гороховик, В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации / В. В. Гороховик. – Минск: Наука и техника, 1990.
6. Гороховик, В. В. Теоремы об отделимости выпуклых множеств ступенчато-линейными функциями и их приложения к выпуклым задачам оптимизации / В. В. Гороховик, Е. А. Шинкевич // Нелинейный анализ и приложения / НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 6. – С. 28–31.