УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор; Е. И. Блинова, доцент

ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ГДР СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ [1]

Linear hybrid differential-difference systems (DAD systems) are studied under action of random disturbances described by stochastic processes with finite number of realizations and piecewise continuous mathematical expectation (mean value). For such systems, an analogy of the well-known (for ordinary systems) variation-of-constants Cauchy's formula is given. This result is applied to obtaining the effective parametric criterion relative controllability of DAD systems. In particular a necessary and sufficient condition of relative controllability with respect to continuous and piecewise continuous state variables, which expressed in terms of defining equation solutions, is given, as well as relative controllability criterion with respect to both types of variables is formulated.

Введение. На современном этапе развития науки и техники появляются новые возможности математического моделирования с применением компьютерных технологий, что позволяет дать более адекватное математическое описание реальных технологических процессов. В результате возрастают требования к математическим моделям. С одной стороны, усложняются сами модели, с другой – существенно увеличивается глубина их математического исследования. В последнее время, особенно в англоязычной литературе, большое внимание уделяется математическим моделям гибридных динамических систем, где в основном рассматриваются конкретные дискретно-непрерывные динамические модели либо модели с коммутацией. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен (см. работы [1–16] и ссылки к ним). Гибридность означает, вообще говоря, неоднородность в природе рассматриваемого процесса или методах его изучения. Термин «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащие в основной динамике непрерывные и дискретные (и/или логические) сигналы (переменные), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что в конечном счете и определяет характер (природу) гибридных систем.

Ниже рассматриваются гибридные дифференциально-разностные (ГДР) системы со случайными воздействиями. К таким системам сводятся некоторые типы дискретно-непрерывных систем и дифференциально-разностных систем нейтрального типа. ГДР системы, в свою очередь, являются частным случаем дескрипторных систем с запаздывающим аргументом. Работа в целом примыкает к исследованиям [1, 2, 14] по детерминированным ГДР системам.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый ГДР системой вида:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + D_1\xi(t),\ t > 0, \quad (1)$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h) + B_2u(t) + D_2\eta(t),\ \ t \geq 0, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(+0) = \varphi_0,\ x_2(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-h, 0). \quad (3)$$

Здесь $x_1(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$, $u(t) \in \mathbf{R}^{r}$, $\xi(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$, $\eta(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$; A_{11}, A_{12}, B_1, D_1, A_{21}, A_{22}, B_2, D_2 – постоянные матрицы соответствующих размеров; $0 < h$ – постоянное запаздывание; $\varphi_0 \in \mathbf{R}^{n_1}$; элементы вектор-функции φ являются кусочно-непрерывными на промежутке $[0; +\infty)$ функциями; переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ описывают текущее состояние объекта, причем $x_1(t)$ – непрерывная, $x_2(t)$ – кусочно-непрерывная вектор-функция при $t \geq 0$; $u(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$ r-вектор-функция (управляемое внешнее воздействие); $\xi(t)$, $\eta(t)$ – внешние возмущения, компоненты которых представляют собой векторные случайные процессы, $t \geq 0$. Для простоты предположим, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ при $t \geq 0$ имеют конечное число реализаций, которые являются кусочно-непрерывны-ми при $t \geq 0$ функциями, и математические ожидания $\mathbf{E}\xi(t) = m(t)$, $\mathbf{E}\eta(t) = n(t)$ – кусочно-непрерывные при $t \geq 0$ m_1- и m_2-вектор-функции соответственно.

Определение. При заданном моменте времени $t_1 > 0$ система (1), (2) называется:

1) относительно t_1-управляемой по x_1, если для любых начальных данных φ_0, φ, любого

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

конечного состояния $x^*_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, любых вектор-функций $m(t)$, $n(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такое, что соответствующее решение $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $\mathbf{E}x_1(t_1) = x^*_1$;

2) относительно t_1-управляемой по x_2, если для любых начальных данных φ_0, φ, любого конечного состояния $x^*_2 \in \mathbf{R}^{n_2}$, любых вектор-функций $m(t)$, $n(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такое, что соответствующее решение $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $\mathbf{E}x_2(t_1) = x^*_2$;

3) относительно t_1-управляемой, если для любых начальных данных φ_0, φ, любых конечных состояний $x^*_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $x^*_2 \in \mathbf{R}^{n_2}$, любых вектор-функций $m(t)$, $n(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такое, что соответствующее решение $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [0,\ t_1]$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $\mathbf{E}x_1(t_1) = x^*_1$, $\mathbf{E}x_2(t_1) = x^*_2$.

Задача. Найти параметрический критерий относительной t_1-управляемости системы (1)–(3) со случайными возмущениями.

2. Интегральное представление решений. Поскольку $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – случайные процессы с конечным числом реализаций $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, m^*$, и $\eta_j(t)$, $j = 1, \ldots, n^*$, то решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1), (2) будут также случайными процессами с конечным числом реализаций $x^1_{ij}(t)$, $x^2_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m^*$, $j = 1, \ldots, n^*$. Тогда, используя представление гибридных систем по обобщенной формуле Коши [1], для неслучайной функции $x^1_{ij}(t)$ получаем:

$$x^1_{ij}(t) = X^*_1(t)\,\varphi_0 + \int_{-h}^{0} X^*_2(t-\tau-h)A_{22}\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t (X^*_1(t-\tau)B_1 + X^*_2(t-\tau)\,B_2)u(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t (X^*_1(t-\tau)D_1\,\xi_i(\tau) + X^*_2(t-\tau)\,D_2\,\eta_j(\tau))\,d\tau \quad (4)$$

при $t \geq 0$. Здесь матрицы-функции $X^*_1(t)$ и $X^*_2(t)$ – решения сопряженной системы

$$\frac{dX^*_1(t)}{dt} = X^*_1(t)\,A_{11} + X^*_2(t)\,A_{21},\ t \geq 0,\ t \neq kh, \quad (5)$$

$$X^*_2(t) = X^*_1(t)\,A_{12} + X^*_2(t-h)\,A_{22},\ t \geq 0, \quad (6)$$

$$X^*_2(t) = 0,\ t < 0,\ X^*_1(t) = I_{n_1} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, \quad (7)$$

где I_{n_1} – единичная $n_1 \times n_1$-матрица.

Вычислим теперь математическое ожидание $\mathbf{E}x_1(t)$ решения $x_1(t)$:

$$\mathbf{E}x_1(t) = \sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{n^*} p_{ij}x^1_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{n^*} p_{ij}(X^*_1(t)\,\varphi_0 +$$

$$+ \int_{-h}^{0} X^*_2(t-\tau-h)A_{22}\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t (X^*_1(t-\tau)B_1 +$$

$$+ X^*_2(t-\tau)\,B_2)u(\tau)\,d\tau) + \sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{n^*} p_{ij} \int_0^t X^*_1(t-\tau)D_1 \times$$

$$\times \xi_i(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{n^*} p_{ij} \int_0^t X^*_2(t-\tau)D_2\,\eta_j(\tau)\,d\tau =$$

$$= X^*_1(t)\,\varphi_0 + \int_{-h}^{0} X^*_2(t-\tau-h)A_{22}\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t (X^*_1(t-\tau)B_1 + X^*_2(t-\tau)\,B_2)u(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t X^*_1(t-\tau)D_1 \sum_{i=1}^{m^*} p^*_i\,\xi_i(\tau)\,d\tau + \int_0^t X^*_2(t-\tau)D_2 \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n^*} p^{**}_j\,\eta_j(\tau)\,d\tau = X^*_1(t)\,\varphi_0 + \int_{-h}^{0} X^*_2(t-\tau-h) \times$$

$$\times A_{22}\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t (X^*_1(t-\tau)B_1 + X^*_2(t-\tau)B_2)u(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t X^*_1(t-\tau)D_1\,m(\tau)\,d\tau + \int_0^t X^*_2(t-\tau)D_2 n(\tau)\,d\tau, \quad (8)$$

где $p_{ij} = \mathbf{P}(\xi(\cdot) = \xi_i(\cdot),\ \eta(\cdot) = \eta_j(\cdot))$ – вероятность появления реализаций $\xi_i(\cdot)$, $\eta_j(\cdot)$; $p^*_i = \mathbf{P}(\xi(\cdot) = \xi_i(\cdot))$ и $p^{**}_j = \mathbf{P}(\eta(\cdot) = \eta_j(\cdot))$ – вероятности появления реализаций $\xi_i(\cdot)$ и $\eta_j(\cdot)$ соответственно. Аналогично

$$\mathbf{E}x_2(t) = X^*_1(t)\,\varphi_0 + \int_{-h}^{0} X^*_2(t-\tau-h)A_{22}\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t (X^*_1(t-\tau)B_1 + X^*_2(t-\tau)B_2)u(\tau)\,d\tau + Z^*(T_t h) \times$$

$$\times\ A_{22}\varphi(t - T_t h - h) + \sum_{k=0}^{T_t} Z^*(kh)B_2 u(t-kh) +$$

$$+ \int_0^t X^*_1(t-\tau)D_1\,m(\tau)\,d\tau + \int_0^t X^*_2(t-\tau)D_2\,n(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{T_t} Z^*(kh)D_2 n(t-kh),$$

где $T_t = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}\left[\dfrac{t-\varepsilon}{h}\right]$, символ $[d]$ означает целую часть числа d; матрицы-функции $X^*_1(\cdot)$,

$X_2^*(\cdot)$, $Z^*(\cdot)$ удовлетворяют следующей сопряженной системе:

$$\frac{dX_1^*(t)}{dt} = X_1^*(t)\,A_{11} + X_2^*(t)\,A_{21},\ \ t \geq 0,\, t \neq kh,$$

$$X_2^*(t) = X_1^*(t)\,A_{12} + X_2^*(t-h)\,A_{22},\, t \geq 0,$$

$$X_1^*(kh+0) - X_1^*(kh-0) = Z^*(kh)\,A_{21},$$

$$Z^*(kh) = Z^*(kh-h)\,A_{22},\ \ k = 1, \ldots, T_t,$$

с начальными условиями

$$X_2^*(t) = 0,\, t < 0;\ X_1^*(0) = X_1^*(+0) = A_{21} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_1},$$
$$Z^*(0) = I_{n_2} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}.$$

3. Критерии относительной управляемости. Из представления (8) нетрудно заметить, что система (1), (2) относительно t_1-управляема по x тогда и только тогда, когда для любого n-вектора $x_1^* \in \mathbf{R}^{n_1}$ существует кусочно-непрерывная r-вектор-функция $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такая, что

$$\int_0^{t_1} (X_1^*(t_1-\tau)B_1 + X_2^*(t_1-\tau)\,B_2)u(\tau)\,d\tau = x_1^*,$$

откуда вытекает неявный критерий относительной t_1-управляемости по x_1: система (1), (2) относительно t_1-управляема по x_1 в том и только в том случае, если строки матрицы-функции $X_1^*(t_1-\tau)B_1 + X_2^*(t_1-\tau)\,B_2$, $\tau \in [0, t_1]$, линейно независимы на промежутке $[0, t_1]$. Отсюда, используя технику [1–3] определяющих уравнений для ГДР систем, можно получить критерий относительной t_1-управляемости системы по x_1, выраженный в терминах решений определяющих уравнений таких систем.

Теорема 1. Система (1), (2) относительно t_1-управляема по x_1 тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[X_k^1(t),\ k = 1, \ldots, n_1;\ t \in [0,\ t_1)\right] = n_1,$$

где $X_k^1(\cdot)$, $k = 1, \ldots,$ – решение определяющего уравнения системы (1), (2):

$$X_k^1(t) = A_{11}\,X_{k-1}^1(t) + A_{12}\,X_{k-1}^2(t) + B_1\,U_{k-1}(t),$$

$$X_k^2(t) = A_{21}\,X_k^1(t) + A_{12}\,X_k^2(t-h) + B_2 U_k(t),$$

$k = 0, 1, \ldots;\ t \geq 0$; с начальными условиями

$$X_k^1(t) = 0,\ X_k^2(t) = 0, \text{ если } k < 0 \text{ или } t < 0;$$

$$U_0(0) = I_r,\ U_k(t) = 0, \text{ если } k^2 + t^2 \neq 0.$$

Аналогично имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Условие

$$\operatorname{rank}\left[X_k^2(t),\ k = 0, 1, \ldots, n_2;\ t \in [0,\ t_1)\right] = n_2$$

является необходимым и достаточным для относительной t_1-управляемости системы (1), (2) по x_2.

Система (1), (2) относительно t_1-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[\begin{bmatrix} X_k^1(t) \\ X_k^2(t) \end{bmatrix},\, k = 0, \ldots, n_1 + n_2;\, t \in [0,\ t_1)\right] = n_1 + n_2.$$

Заключение. В работе рассмотрены ГДР системы со случайными возмущениями с конечным числом реализаций. Для таких систем математическое ожидание производной $\dot{x}_1(t)$ случайной функции $x_1(t)$ (непрерывной составляющей текущего положения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (1), (2)) совпадает с производной математического ожидания этой функции, причем случайная функция $\dot{x}_1(t)$ имеет конечное число реализаций – неслучайных функций $\dot{x}_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m^*, j = 1, \ldots, n^*$, т. е. $\frac{d}{dt}(\mathbf{E}x_1(t)) = \mathbf{E}\,\dot{x}_1(t)$, $t \geq 0$.
Это свойство справедливо и для многих более общих случайных процессов. Для всех таких процессов имеет место представление (8) и, следовательно, справедливы теоремы 1, 2. В общем случае, если случайные процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$, $t \geq 0$, понимать как совокупность случайных величин в различные моменты времени t (т. е. зависящие от t как от параметра) с конечномерным распределением вероятностей, то производную случайного процесса можно понимать в различных смыслах (например, дифференцирование с вероятностью 1, дифференцирование в среднем). В этом случае вопросы представления решений, а также относительной управляемости ГДР систем остаются открытыми.

Литература

1. Марченко, В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ.– 2006. – Вып. XIV. – С. 3–6.

2. Marchenko, V. M. On the observability of linear differential-algebraic systems with delays / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, № 8. – P. 1387–1392.

3. Кириллова, Ф. М. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах / Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибирского отд. АН СССР. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.

4. Ахундов, А. А. Управляемость линейных гибридных систем / А. А. Ахундов // Управляемые системы: сб. тр. / Ин-т математики Сибирского отд. АН СССР. – Новосибирск:

Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.

5. Щеглова, А. А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами / А. А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 86–101.

6. Марченко, В. М. Разложение решений управляемых гибридных систем в ряд по решениям их определяющих уравнений / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Кибернетика и вычислительная техника (Киев). – 2002. – Вып. 135. – С. 39–49.

7. Heemels, W. P. M. H. On the Equivalence of Classes of Hybrid Dynamical Models / W. P. M. H. Heemels, B. De Schutter, A. Bemporad // In Proc. 40-th Annu. IEEE Conf. Decision and Control. – Orlando, Florida, USA, December 2001. – P. 364–369.

8. März, R. Solvability of linear differential-algebraic equations with properly stated leading terms / R. März // Results in Mathematics 45(2004). – Basel: Birkhauser Verlag, 2004. – P. 88–95.

9. Observability of linear hybrid systems / R. Vidal [et al.] // In Hybrid systems: Computation and Control. – 2003. – Vol. 2623 of LNCS. – P. 526–539.

10. Gertler, J. J. Hybrid Systems / J. J. Gertler, J. B. Cruz , M. Peshkin (eds.). – Prepr. 13-th World Congr. – IFAC, 1996. – Vol. J. – P. 275–311, 473–476.

11. Domek, S. Hybrid Systems: Computation and Control / S. Domek, R. Kaszynski (eds.). – IEEE conf. «MMAR'2004». – Vol. 1: Control Theory, Control Engineering, Modelling and Simulation. – Blazejewko, Poland, 2004.

12. Куржанский, А. Б. Отчет о XVI Международном конгрессе ИФАК (IFAC) – Международной федерации по автоматическому управлению / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 183–189.

13. Марченко, В. М. Вполне регулярные системы с последействием / В. М. Марченко // Сб. тр. / Ин-т математики. – 2001. – Т. 7. – С. 97–104.

14. Марченко, В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Доклады РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.

15. De la Sen, M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.

16. Van der Schaft, A. An introduction to hybrid dynamical systems / A. Van der Schaft, H. Schumacher. – Berlin: Springer, 2000.

УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор; З. Зачкевич, магистр

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГДР СИСТЕМ [1]

The paper considers the problem of relative observability for hybrid time invariant difference-differential dynamic systems, i. e. linear stationary differential-algebraic systems with delays (DAD systems), some variables of which being continuous the other – piecewise continuous. For solutions of systems under investigation, we present the determining equation algebraic techniques in order to obtain a series representation into solutions of their determining equations. Then several algebraic properties of the determining equation are studied, in particular, a generalization of the well-known Hamilton-Caley matrix theorem is given for the determining equation solutions and a finite number of generators in the span of determining equation solutions is established. As a result, we obtain effective parametric rank criteria for the relative observability of DAD systems.

Введение. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы относятся к классу гибридных. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен (см., статьи [1, 2] и ссылки к ним).

В работе изучается проблема относительной наблюдаемости для гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем при наличии толчков, т. е. таких систем, в описании которых участвуют как дифференциальные, так и разностные уравнения; толчки при этом описываются также линейным разностным уравнением.

1. Предварительные сведения. Постановка задачи. История проблемы относительной наблюдаемости систем дифференциально-разностных уравнений (запаздывающего типа) датируется 1972 г. [3], где эффективный критерий условной (в терминологии авторов) наблюдаемости таких систем был представлен в терминах решений соответствующих определяющих уравнений.

Рассмотрим простейшую ГДР систему:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t-h), \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$x(jh+0) - x(jh-0) = A_{12}z(jh-h), \; j = 1, \ldots, T_t, \tag{3}$$

$$z(t) = A_{22}\, z(t-h), \; t \ge h, \tag{4}$$

с выходом

$$g(t) = Bx(t) + By(t) + Bz(t). \tag{5}$$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$, $z(t) \in \mathbf{R}^m$, $g(t) \in \mathbf{R}^r$, $t \ge 0$; $A_{11} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $A_{12} \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $A_{21} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $A_{22} \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $B_1 \in \mathbf{R}^{n\times r}$, $B_2 \in \mathbf{R}^{m\times r}$; h – постоянное запаздывание, $h > 0$; $T_t = \left[\frac{t}{h}\right]$, где символ $[w]$ означает целую часть числа w. Будем считать решением системы (1)–(4) произвольные вектор-функции $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z(\cdot)$, если они удовлетворяют уравнению (1) на интервалах $[jh, (j+1)h)$, $j = 1, \ldots, T_t$, уравнению (2) – для всех $t \ge 0$, и уравнению (3) – в точках jh, $j = 1, \ldots, T_t$.

Для системы (1)–(4) зададим начальные условия в виде

$$x(0+) = x(0) = x_0,\; z(0) = z_0,\; z(\xi) = 0,\; \xi < 0, \quad y(\tau) = \psi(\tau),\; \tau \in [-h,\; 0), \tag{6}$$

где $\psi \in PC([-h, 0], \mathbf{R}^m)$, $PC([-h, 0], \mathbf{R}^m)$ означает множество кусочно-непрерывных m-вектор-функций на промежутке $[-h,\; 0]$.

В работе исследуется задача интегрального представления решений ГДР систем вида (1)–(4), а также проблема конечномерной наблюдаемости системы (1)–(4) по выходу (5).

2. Алгебраические свойства решений определяющего уравнения. Введем определяющее уравнение системы (1)–(5)

$$X_k(t) = A_{11}X_{k-1}(t) + A_{12}Y_{k-1}(t) + U_{k-1}(t), \tag{7}$$

$$Y_k(t) = A_{21}X_k(t) + A_{22}Y_k(t-h), \tag{8}$$

$$Z(t) = A_{22}Z(t-h), \tag{9}$$

$$G_k(t) = B_1X_k(t) + B_2Y_k(t), \;\; k = 0, 1, \ldots; \;\; t \ge 0, \tag{10}$$

с начальными условиями $X_k(t) = 0, Y_k(t) = 0$, $Z(t) = 0, H_k(t) = 0$ для $t < 0$ или $k \le 0$; $Z(0) = I_m$, $U_0(0) = I_n, U_k(t) = 0$ для $t^2 + k^2 \ne 0$.

Легко заметить, что $X_k(t) = 0, Y_k(t) = 0$, $Z(t) = 0$, $G_k(t) = 0$ для $t \ne jh$, где $j = 0, 1, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots$

Лемма 1. Имеют место тождества

$$(A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}A_{21})^i \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} X_{i+1}(lh)\omega^l, i = 0, 1, \ldots$$

---

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.