УДК 519.2

Гончаров В. Н., доцент

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКОМ КОМПЛЕКСЕ

Application of methods of mass service theory in publishing and printing industries is analysed. Transitive processes in system of mass service of printing machines are investigated.

Теория массового обслуживания является эффективным средством исследования производственных процессов, связанных с наличием случайных потоков заказов и определенного числа обслуживающих единиц (каналов обслуживания) [1, 2, 3]. В издательско-полиграфическом комплексе методами теории массового обслуживания могут исследоваться такие процессы, как выполнение заказов на издательские и полиграфические работы, организацию ремонта выходящего из строя оборудования и др.

В трудах известных авторов обычно анализируется установившийся режим работы системы массового обслуживания (СМО) в связи с вычислительными трудностями, возникающими при рассмотрении переходных процессов, а также по причине кратковременности переходных процессов [1, 2, 3].

При исследовании многих технологических процессов, в частности в области полиграфического производства, пренебрежение временем переходного процесса может привести к существенным ошибкам в расчетах. Это связано с тем, что время переходного процесса может занимать существенную часть рабочего времени. Вычислительные трудности, связанные с исследованием переходных процессов, в настоящее время преодолеваются при использовании пакета программ Mathcad 2001, который позволяет достаточно эффективно решать рассматриваемые ниже системы дифференциальных уравнений.

В данной работе производится анализ системы массового обслуживания на примере организации ремонта полиграфического оборудования с учетом переходных процессов, возникающих в течение планового периода. Не касаясь ремонтного обслуживания как такового исследуем модель работы ремонтной службы полиграфического производства методами теории массового обслуживания в следующей постановке.

Ремонтная служба представляется как замкнутая многоканальная СМО с полной взаимопомощью между каналами [3]. Система обслуживает m однотипных технических устройств (ТУ) — печатных машин. Технические устройства выходят из строя в случайные моменты времени, поток заявок на обслуживание — пуассоновский и имеет интенсивность λ. Число каналов обслуживания равно n, причем $n < m$. Длительность обслуживания является случайной величиной с пуассоновским законом распределения и имеет интенсивность μ.

Интенсивность потока заявок λ — это величина, обратная среднему интервалу времени t_z между поступлениями заявок: $\lambda = 1/t_z$. Интенсивность потока обслуживания одним каналом μ — это величина, обратная средней продолжительности ремонта t_k одного технического устройства: $\mu = 1/t_k$.

Модель состояний СМО строится в виде графа состояний [2, 3]. Граф состояний для рассматриваемых условий можно представить в виде схемы, показанной на рис. 1.

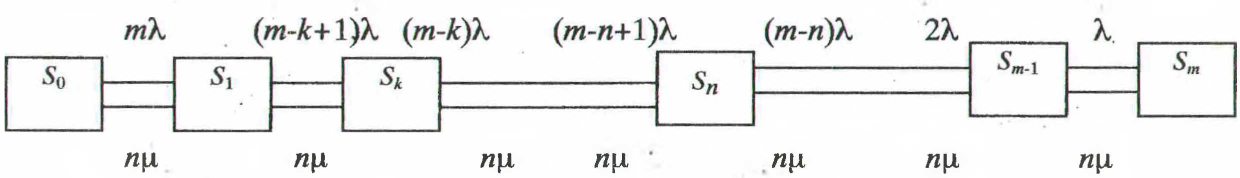

Рис. 1. Граф состояний многоканальной замкнутой СМО

Полная взаимопомощь между каналами означает, что если выходит из строя хотя бы одно ТУ, то к ремонту подключаются все n каналов обслуживания. Распределение объема работ между каналами примерно равномерное. Общая интенсивность обслуживания всеми каналами равна $n\mu$ независимо от количества ТУ, которые находятся в ремонте. Если число поступивших заявок меньше, чем число каналов, то каналы загружены не полностью. Если число заявок превышает число каналов, то образуется очередь заявок.

Время нахождения ТУ в СМО состоит из длительности обслуживания и времени ожидания в очереди, если число заявок превышает число каналов.

Основными характеристиками любой СМО являются вероятности состояния, под которыми понимаются вероятности нахождения в рабочем или нерабочем положении тех или иных технических устройств и каналов обслуживания. Переход системы из одного состояния в другое соседнее состояние происходит при одном из двух событий: поступила одна заявка на ремонт или вышло из ремонта одно ТУ. На рис. 1 через параметр S_i $(i = 0, 1, ..., n)$ обозначены все возможные состояния системы, а именно:

S_0 — все ТУ работают, все каналы обслуживания свободны; интенсивность появления потока заявок равна $m\lambda$;

S_1 — в канале обслуживания находится одна заявка, все каналы обслуживают эту заявку с интенсивностью $n\mu$, интенсивность появления новых заявок на обслуживание равна $(m-1)\lambda$, так как одна заявка уже обслуживается; очередь заявок на обслуживание отсутствует;

S_k — обслуживается k заявок $(k < n)$, заявки обслуживаются всеми каналами с интенсивностью $n\mu$, интенсивность поступления новых заявок равна $(m-n+1)$; очередь отсутствует;

S_n — в каналах обслуживания находится n заявок, каждый канал обслуживает одну заявку с интенсивностью μ; в очереди заявок нет;

S_{n+r} — в систему обслуживания поступило $(n+r) < m$ заявок, n заявок обслуживается n каналами с интенсивностью μ; при этом r заявок находится в очереди;

S_m — в систему обслуживания вступили все m устройств, работающих ТУ нет, на обслуживании находится n заявок; $m-n$ заявок находится в очереди.

На рис. 1 изображены прямоугольниками состояния системы. Стрелки, направленные вправо, указывают движение потока заявок. Стрелки, направленные влево, показывают движение потока обслуживаний. В каждый момент может перемещаться влево или вправо только одна заявка, изменяя состояние потока заявок на единицу.

Переход в другое состояние происходит в зависимости от того, как потоки воздействовали на систему.

Пусть, например, система находится в состоянии k, когда в ней находится k заявок. Если в течение некоторого времени поступила одна заявка и не закончено обслуживание последней заявки, то система перейдет в состояние $k + 1$. Если не поступило ни одной заявки и закончено обслуживание одной заявки, то система перейдет в состояние $k - 1$. Наконец, если в течение этого времени поступила одна заявка и закончено обслуживание одной заявки, то состояние системы не изменилось.

Динамика изменения состояния СМО зависит от величины $\rho = \lambda/(n\mu)$, которая называется приведенной интенсивностью потока заявок. Необходимым условием работы любой СМО является выполнение неравенства $\rho > 1$. В противном случае система обслуживания не сможет обслуживать поток заявок и будет неработоспособной.

Все количественные характеристики СМО зависят от вероятностей ее состояний во всех возможных ситуациях.

Из теории известно [2], что для пуассоновского потока заявок и пуассоновского закона выполнения заказов, вероятности состояний СМО и их изменение во времени описываются системой дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена.

Не вдаваясь в существо математических аспектов задачи, отметим, что существует мнемоническое правило, позволяющее на основании графа состояний строить систему дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена. Это мнемоническое правило состоит в следующем. Число дифференциальных уравнений равно $m + 1$ – числу состояний СМО (на единицу больше, чем количество обслуживаемых ТУ).

В левой части каждого уравнения записывается производная от вероятности состояния, а в правой части содержится столько членов, сколько стрелок связано изображением этого состояния на графе состояний.

Если стрелка направлена из блока, характеризующего состояние, то член учитывается со знаком минус, если входит в блок состояния, то со знаком плюс. Каждый член равен произведению интенсивности (λ или μ), умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Для примера рассмотрена СМО ремонтного обслуживания, в которой $m = 5$, число каналов $n = 3$. Граф состояний системы приведен на рис. 2.

На основании рис. 2 и мнемонического правила получается следующая система дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0 + n\mu P_1; \\ \dfrac{dP_1}{dt} = -[(m-1)\lambda + n\mu]P_1 + \lambda m P_0 + n\mu P_2; \\ \dfrac{dP_2}{dt} = -[(m-2)\lambda + n\mu]P_2 + \lambda(m-1)P_1 + n\mu P_3; \\ \dfrac{dP_3}{dt} = -[(m-3)\lambda + n\mu]P_3 + \lambda(m-2)P_2 + n\mu P_4; \\ \dfrac{dP_4}{dt} = -[(m-4)\lambda + n\mu]P_4 + \lambda(m-3)P_3 + n\mu P_5; \\ \dfrac{dP_5}{dt} = -m\mu P_5 + \lambda P_4. \end{cases}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений численным методом выполнено с использованием пакета Mathcad. На рис. 3 приводятся результаты решения системы в виде переходных процессов для вероятностей состояний $P_k(t)$, $k = 0, 1, ..., m$, где k — индекс состояния СМО. По оси абсцисс отложены отметки времени: $i = 0, 1, 2, ..., 40$. При расчетах приняты следующие данные: среднее время между заказами равно t_λ, средняя продолжительность ремонта одного ТУ равна $t_\mu = 8$. Интенсивность потока заказов $\lambda = 1/t_\lambda$ =0,083, интенсивность потока обслуживания одним каналом $\mu = 1/t_\mu$ =0,125. Интервал интегрирования — сорокачасовая неделя. Принято, что в начале недели все ТУ работают и все каналы простаивают, т. е. вероятность $P_0(0) = 1$.

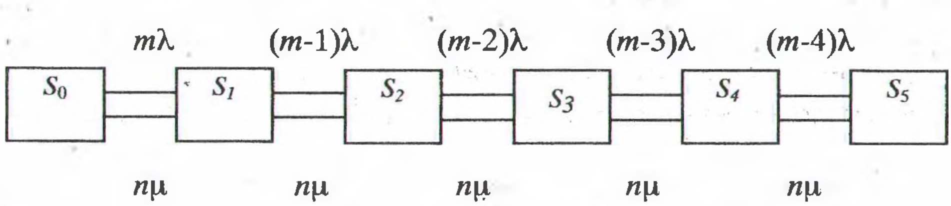

Рис. 2. Система массового обслуживания для пяти ТУ и трех каналов

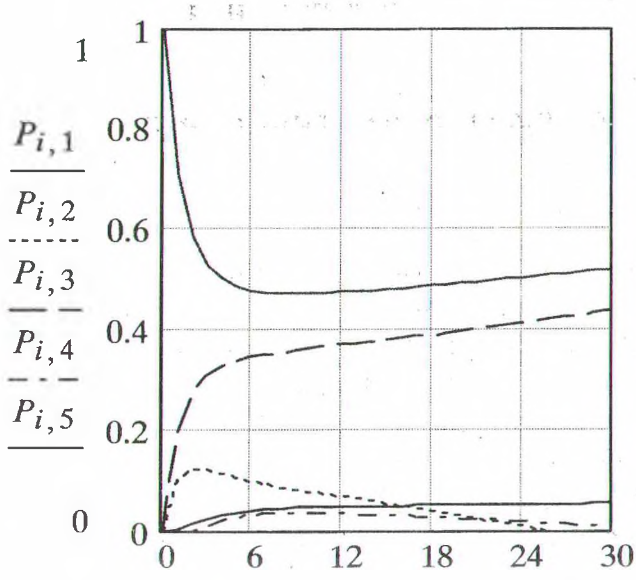

Рис. 3. Переходные процессы системы массового обслуживания

Как показано на схеме, для рассматриваемых условий переходный процесс длится около 15 ч, т. е. 37,5% от общего времени. Отличие полученных результатов от традиционных расчетов состоит в том, что все эти характеристики вычисляются в динамике работы СМО, а не в установившемся состоянии. Это подтверждает целесообразность учета переходных процессов.

Автором производилась приближенная оценка оптимального числа каналов СМО для 10 ТУ и трех каналов обслуживания [3]. Получено, что при расчетах по установившемуся режиму оптимальным является $n = 3$. Если же учесть переходные процессы, то оптимальное число каналов уменьшается до $n = 2$. Экономический эффект очевиден.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2001. — 911 с.

2. Венцель Е. С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. — М., 1980. — 124 с.

3. Гончаров В. Н. Модель организации ремонта полиграфического оборудования как система массового обслуживания // Математические методы в технике и технологиях: Сб. тр. XVI Междунар. науч. конф.: В 10 т. / Под общ. ред. В. С. Балакирева / РГАСХМ ГОУ. — Ростов-на-Дону, 2003. — Т. 5. — 254 с.