УДК 621.391.26

А. А. Дятко, доцент; С. М. Костромицкий, профессор (СКБ «Камертон»); П. Н. Шумский, доцент (СКБ «Камертон»)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Algorithms of formation of stationary casual processes by the set correlation function and with the set law of distribution of probabilities of their instant values are considered.

Задача формирования реализаций случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками имеет ряд важных научно-технических приложений, таких, как имитационное моделирование работы систем различного назначения на ЭВМ. Например, при разработке радиолокационных комплексов различного назначения такое моделирование позволяет оценить качество используемых алгоритмов обработки информации для различных условий работы комплекса. Сигналы, отраженные от наблюдаемых объектов, и сигналы помех в общем случае имеют законы распределения амплитуд, отличные от нормального. Так распределение промышленных помех аппроксимируется логарифмически нормальным законом, распределение огибающей смеси высокочастотного сигнала и шума – обобщенным законом Релея и т. д. Поэтому для качественного имитационного моделирования принятого антенной радиолокационной станции сигнала необходимо уметь получать временные реализации таких сигналов и помех.

Наиболее распространенные методы формирования стационарных случайных процессов с заданными характеристиками используют преобразование некоторого исходного процесса (обычно нормального) с помощью линейной инерционной и нелинейной безынерционной цепи [1, 2]. При этом часто решаются задачи получения случайного процесса с заданным законом распределения вероятностей мгновенных значений без предъявления требований к виду его корреляционной функции. В других случаях возникают задачи формирования случайных процессов с заданными корреляционными функциями без формулировки требований к закону распределения вероятностей его мгновенных значений. Обе упомянутые задачи являются более простыми по сравнению с теми, когда требуется сформировать стационарный случайный процесс с заданной корреляционной функцией и с заданным законом распределения вероятностей мгновенных значений.

Данная работа и посвящена вопросам разработки алгоритмов формирования стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией и с заданным законом распределения вероятностей их мгновенных значений и реализации их в виде программного обеспечения для ЭВМ.

Пусть некоторый стационарный случайный процесс имеет плотность распределения вероятностей мгновенных значений $p_y(y)$. Если распределение вероятностей $p_y(y)$ является односторонним, т. е. $p_y(y) = 0$ при $y < 0$, то математическое ожидание процесса $m_y \neq 0$ и его ковариационная функция имеет вид

$$B_y(\tau) = K_y(\tau) + m_y^2 , \qquad (1)$$

где $K_y(\tau)$ – корреляционная функция процесса.

Для двухсторонних распределений $p_y(y)$ возможны ситуации, когда $m_y = 0$ и $B_y(\tau) = K_y(\tau)$.

Тогда задача моделирования стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией и с заданным законом распределения вероятностей мгновенных значений может быть сформулирована следующим образом: необходимо сформировать стационарный случайный процесс с одномерной плотностью распределения вероятностей $p_y(y)$ и корреляционной функцией $K_y(\tau)$. Такая задача может быть решена путем специально подобранного нелинейного преобразования соответствующего нормального процесса.

Выберем в качестве исходного нормальный стационарный случайный процесс $\xi_x(t)$ с нулевым средним. Известно [1], что всегда существует такое нелинейное безынерционное преобразование $y = f(x)$, которое превращает нормальную функцию плотности $p_x(x)$ процесса $\xi_x(t)$ в заданную функцию плотности $p_y(y)$. Если исходный процесс $\xi_x(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)$, то преобразованный процесс $\xi_y(t)$ будет иметь в общем случае ковариационную функцию (1) $B_y(\tau)$, отличную от функции $K_x(\tau)$ и связанную с ней некоторой зависимостью

$$B_y(\tau) = \varphi[K_x(\tau)]. \qquad (2)$$

Вид этой зависимости определяется преобразованием $y = f(x)$. Для того чтобы корреляционная функция $K_y(\tau)$ преобразованного процесса была требуемой, необходимо выбрать корреляционную функцию исходного процесса равной

$$K_x(\tau) = \varphi^{-1}[B_y(\tau)], \qquad (3)$$

где $\varphi^{-1}[B_y(\tau)]$ – функция, обратная функции $\varphi[B_y(\tau)]$.

Выберем преобразование $y = f(x)$ монотонным и положим, что исходный процесс имеет равное нулю математическое ожидание и единичную дисперсию, т. е. $M[\xi_x(t)] = m_x = 0$ и

$$M[\xi_x^2(t)] = \sigma_x^2 = 1.$$

Таким образом

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) = \rho_x(\tau), \qquad (4)$$

где $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция процесса $\xi_x(t)$.

Известно [1], что для монотонного преобразования $y = f(x)$ справедливо

$$p_y(y)dy = p_x(x)dx,$$

или

$$\int_{-\infty}^{y} p_y(y)dy = \int_{-\infty}^{x} p_x(x)dx.$$

Откуда

$$F_y(y) = F_x(x), \qquad (5)$$

где $F_y(y)$ и $F_x(x)$ – интегральные законы распределения процессов $\xi_x(t)$ и $\xi_y(t)$ соответственно.

В соответствии с принятыми предположениями

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (6)$$

и из (5) получаем уравнение

$$F_y(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0. \qquad (7)$$

Так как интегральный закон $F_y(y)$ задан, то, полагая в (7) последовательно $x = x_1, x_2, ..., x_N$ и решая уравнение относительно y, получим соответствующий набор значений $y = y_1, y_2, ..., y_N$. Другими словами, получим необходимую функциональную зависимость $y_i = f(x_i)$ для дискретного набора значений аргумента $x = x_1, x_2, ..., x_N$.

При известном преобразовании $y = f(x)$ зависимость

$$B_y(\tau) = \varphi[K_x(\tau)] = \varphi[\rho_x(\tau)]$$

можно получить, если представить функцию $B_y(\tau)$ в виде ряда по степеням $\rho_x(\tau)$. Искомое разложение имеет вид [1]

$$B_y(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \frac{\rho_x^m(\tau)}{m!}, \qquad (8)$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (9)$$

$H_m(x)$ – полиномы Эрмита.

Для нахождения полиномов $H_m(x)$ существует рекуррентная формула:

$$H_{m+1}(x) = xH_m(x) - mH_{m-1}(x), \qquad (10)$$

причем первые три полинома имеют вид

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = x^2 - 1. \qquad (11)$$

При численном анализе пределы интегрирования в (9) следует заменить конечными, а в выражении (8) ограничиться конечным числом слагаемых. Их число можно определить из следующих соображений.

При $\tau = 0$ из (8) получаем

$$B_y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \frac{\rho_x^m(0)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^2}{m!}, \qquad (12)$$

так как $\rho_x(0) = 1$.

Поскольку значение $B_y(0) = K_y(0) + m_y^2$ может быть вычислено заранее, то число слагаемых M в (8) можно определить из условия

$$\left| B_y(0) - \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m^2}{m!} \right| < \varepsilon, \qquad (13)$$

где ε – заданная точность вычислений.

Таким образом, при известных коэффициентах c_m выражение (8) можно заменить выражением с конечным числом слагаемых

$$B_y(\tau) = \sum_{m=0}^{M} c_m^2 \frac{\rho_x^m(\tau)}{m!}. \qquad (14)$$

Решая уравнение (14) относительно $\rho_x(\tau)$, находим нормированную корреляционную функцию исходного нормального случайного процесса.

Решение уравнения (14) может быть получено численным методом для дискретного набора значений τ.

Положим $\tau_i = i\Delta t$, где Δt – интервал дискретизации случайного процесса $\xi_x(t)$; $i = 0, 1, 2, ..., N-1$; N – число отсчетов по τ. Пусть

$$B_y(\tau_i) = B_i \quad \text{и} \quad \rho_x(\tau_i) = \rho_i .$$

Тогда для каждого i имеем уравнение относительно ρ_i:

$$B_i = \sum_{m=0}^{M} c_m^2 \frac{\rho_i^m}{m!} . \qquad (15)$$

Полагая последовательно $i = 0, 1, 2, ..., N-1$ и решая каждый раз уравнение (15) относительно ρ_i, получаем дискретный набор значений $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{N-1}$ требуемой корреляционной функции $\rho_x(\tau)$.

Для моделирования нормального стационарного случайного процесса $\xi_x(t)$ с заданной корреляционной функцией $K_x(\tau) = \rho_x(\tau)$ воспользуемся линейным преобразованием стационарной последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ... N$ независимых нормальных случайных чисел с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (нормированный дискретный белый шум) в последовательность, коррелированную по заданному закону. Корреляционная функция такой последовательности имеет вид

$$R_n = M(x_k x_{k+n}) = \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \qquad (16)$$

где $M()$ – оператор математического ожидания; δ_n – символ Кронеккера.

При этом будем использовать оператор линейного преобразования в виде скользящего суммирования с некоторыми весовыми коэффициентами c_k [1]:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} c_k x_{n-k} , \qquad \xi_n = \xi_x(n\Delta t). \qquad (17)$$

Вычисляя $\rho_x(\tau_n) = \rho_x(n\Delta t) = \rho_n$, получим

$$\rho_n = M(\xi_i \xi_{i+n}) = M(\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} c_k c_p x_{i-k} x_{i+n-p}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} c_k c_p M(x_{i-k} x_{i+n-p}) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} c_k c_p \delta_{n-p+k} = \qquad (18)$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} c_k c_{n+k}, & p = n+k \\ 0, & p \neq n+k . \end{cases}$$

Подставляя в (18) последовательно $n = 0, 1, 2, ..., N-1$, получим систему уравнений для определения необходимых весовых коэффициентов:

$$\begin{cases} \rho_0 = \sum_{k=1}^{N} c_k^2 = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_N^2 ; \\ \rho_1 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k c_{k+1} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + ... + c_{N-1} c_N ; \\ .... \\ \rho_{N-1} = \sum_{k=1}^{1} c_k c_{k+N-1} = c_1 c_N . \end{cases} \qquad (19)$$

Таким образом, подставляя полученный из решения уравнения (15) набор значений ρ_i в систему уравнений (19), можно получить требуемый набор коэффициентов для формирования нормального случайного процесса с требуемыми характеристиками, который должен подвергаться функциональному преобразованию $y = f(x)$.

Таким образом, алгоритм моделирования стационарного случайного процесса с заданной плотностью вероятностей его мгновенных значений и корреляционной функцией сводится к следующему:

- получить необходимое функциональное преобразование $y = f(x)$ путем решения уравнения (7);
- получить нормированную корреляционную функцию нормального стационарного случайного процесса $\rho_x(\tau)$ путем решения уравнения (15);
- получить набор коэффициентов для формирования нормального случайного процесса $\xi_x(t)$ с корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$ путем решения системы уравнений (19);
- в соответствии с выражением (17) сформировать нормальный стационарный случайный процесс;
- получить искомый стационарный случайный процесс $\xi_y(t)$ путем функционального преобразования $y = f(x)$, или $\xi_y(t) = f[\xi_x(t)]$.

На основе вышеописанных алгоритмов авторами разработан комплекс программ для ЭВМ, который позволяет получить реализацию стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией и с заданным законом распределения вероятностей его мгновенных значений.

Литература

1. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.

2. Овсянников А. В. Формирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Труды БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. – 2002. – Вып. X. – С. 133–136.