УДК 621.3

В. И. Горошко, доцент

ИМПЕДАНСНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СВОБОДНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

A new approach to the analyses of free movement in linear electrical circuits, based on free reactance implementation is being developed in the article. The method itself is nonsymbolic and doesn't need neither calculations of dependent initial conditions nor derivation operations.

Расчет динамических процессов в линейных цепях фундирован стандартной процедурой решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которая слабо учитывает имманентные свойства электрических цепей, особенно в отношении поиска общего решения однородного уравнения (свободный процесс). В большей мере специфика цепей проявляется в операторном методе, однако при этом преобразования неизбежно приобретают символьный характер. В работе развит подход, позволяющий анализировать динамику свободных процессов на основе введения числовых импедансов реактивных элементов.

Теорема. Уравнения динамики свободных процессов в линейной цепи n-го порядка допускают разрешимое импедансное представление на основе отображения каждого реактивного элемента совокупностью n свободных реактивных сопротивлений $\rho_к$, область значений которых – вся комплексная плоскость.

Доказательство. Пусть известен спектр характеристического уравнения, т. е. корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ограничимся случаем простых корней. Тогда для свободной составляющей напряжения емкости существует представление

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots + A_n e^{p_n t} = u_{C,\text{св}1}(t) + u_{C,\text{св}2}(t) + \ldots + u_{C,\text{св}n}(t), \quad (1)$$

где коэффициенты A_i, $i \in [1; n]$ принимают действительные или комплексные значения.

Пусть $p_1 = -\delta_1$, $p_2 = -\delta_2$ – действительные корни, а $p_{3,4} = -\delta_3 \pm j\omega_3$ – сопряженная пара комплексных корней. Из уравнения динамики емкости $i_{C,\text{св}} = C du_{C,\text{св}}/dt$ следует

$$I_{C,\text{св}}(t) = p_1 C A_1 e^{p_1 t} + p_2 C A_2 e^{p_2 t} + \ldots + p_n C A_n e^{p_n t} = p_1 C u_{C,\text{св}1}(t) + p_2 C u_{C,\text{св}2}(t) + \ldots + p_n C u_{C,\text{св}n}(t). \quad (2)$$

Аналогично из представления для индуктивного тока

$$i_{L,\text{св}}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + \ldots + B_n e^{p_n t} = i_{L,\text{св}1}(t) + i_{L,\text{св}2}(t) + \ldots + i_{L,\text{св}n}(t), \quad (3)$$

с помощью уравнения динамики $u_{L,\text{св}}(t) = L di_{L,\text{св}}/dt$ находим

$$u_{L\text{св}}(t) = p_1 L i_{L\text{св}1}(t) + p_2 L i_{L\text{св}2}(t) + \ldots + p_n L i_{L,\text{св}n}(t). \quad (4)$$

В выражении (1) коэффициенты $p_i C$, $i \in [1; n]$ имеют размерность проводимости. Обратные им величины

$$\rho_{C2} = -\frac{1}{\delta_2 C}; \quad \rho_{C1} = \frac{1}{p_1 C} = -\frac{1}{\delta_1 C};$$

$$\rho_{C4} = \frac{1}{(-\delta - j\omega)c}; \quad \rho_{C3} = \frac{1}{(-\delta + j\omega)C}$$

назовем свободными реактивными сопротивлениями (CP-сопротивлениями) емкости. Аналогично вводим CP-сопротивления индуктивности:

$$\rho_{L1} = p_1 L = -\delta_1 L; \quad \rho_{L2} = -\delta_2 L;$$

$$\rho_{L3} = (-\delta_3 + j\omega_3)L; \quad \rho_{L4} = (-\delta_3 - j\omega_3)L.$$

Для устойчивых цепей все $\delta_i > 0$, $i \in [1; n]$, т. е. все ρ_{Ci}, ρ_{Li} расположены в левой комплексной полуплоскости. Для неустойчивой цепи часть CP-сопротивлений попадает в правую полуплоскость.

Начальные значения свободных составляющих

$$u_{C,\text{св}}(0) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n;$$

$$i_{L,\text{св}}(0) = B_1 + B_2 + \ldots + B_n \quad (5)$$

стандартно вычисляются как разности

$$u_{C,\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C1,\text{вн}}(0);$$

$$i_{L,\text{св}}(0) = i_L(0) - i_{L1,\text{вн}}(0),$$

где $u_C(0)$, $i_L(0)$ — полные начальные значения; $u_{C1,\text{вн}}(0)$, $i_{L1,\text{вн}}(0)$ — начальные значения вынужденных составляющих.

Пусть цепь содержит n реактивных элементов, среди которых имеется n_C емкостей и n_L индуктивностей, т. е. $n = n_C + n_L$. Для каждой из емкостей $C_к$ цепи образуем независимые контуры с контурным током $i_{Cк,св}(t)$, а для каждой индуктивности $L_к$ образуем дополнительные контуры с током $i_{Lк,св}(t)$. Поскольку у свободных составляющих $u_{C,св}(t)$, $i_{L,св}(t)$ неизвестны только коэффициенты A_i, B_i, , $i \in [1;\, n]$, то все необходимые уравнения достаточно записывать для момента времени $t = 0$. Для всех выделенных контуров числом n записываем при $t = 0$ контурные уравнения, причем токи емкостей, согласно (2), вводятся в виде

$$i_{c,св}(0) = A_1/\rho_{C1} + A_2/\rho_{C2} + \ldots + A_n/\rho_{Cn}.$$

Следует отметить, что законы Кирхгофа (контурные уравнения) верны не только для полных свободных составляющих $u_{C,св}(t)$, $i_{L,св}(t)$, но и для их спектральных составляющих, что непосредственно вытекает из факта линейной независимости спектральных составляющих в (1), (3). Составив для всех n контуров контурные уравнения для отдельных спектральных составляющих (числом $k = n - 2$ для каждого контура), получим $n_c(n-2) + n_L(n-2) = n(n-2)$ независимых уравнений, которые совместно с ранее записанными n контурными уравнениями для полных составляющих и уравнениями (5) образуют систему n^2 независимых уравнений с n^2 неизвестными. Теорема доказана.

Данное доказательство носит конструктивный характер, поскольку приводится один из возможных алгоритмов получения системы уравнений свободной динамики цепи.

Из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами известно, что коэффициенты A_3, A_4, а также B_3, B_4, соответствующие паре комплексно-сопряженных корней $\rho_{3,4} = -\delta_3 \pm j\omega_3$, являются также комплексно-сопряженными, т. е.

$$A_3 = a_3 + jb_3,\ A_4 = \overset{*}{A_3} = a_3 - jb_3,\ B_4 = \overset{*}{B_3}.$$

В итоге сумма 3-й и 4-й спектральных составляющих в (1) принимает окончательную действительную форму:

$$u_{C,св_3} + u_{C,св_4} = 2e^{-\delta_3 t}(a_3 \cos\omega_3 t - b_3 \sin\omega_3 t). \quad (6)$$

Приведенная теорема позволяет свести расчет свободных составляющих для всех переменных состояния цепи к решению системы линейных алгебраических уравнений. Другим важным преимуществом метода является использование только независимых начальных условий $u_C(0)$, $i_L(0)$, т. е. не требуется вычислять начальные производные:

$$u'_C(0),\ u''_C(0),\ \ldots, u_C^{(n-1)}(0),$$

что является громоздкой и плохо формализуемой задачей (при $n \geq 3$).

Пример. Рассмотрим цепь на рис. 1, для которой $E = 55$ В, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $L = 0{,}5$ Гн, $C = 0{,}5$ Ф. Корни характеристического уравнения: $p_1 = -1$; $p_2 = -5$. Вычисляем CP-сопротивления: $\rho_{L1} = p_1 L = -0{,}5$; $\rho_{L2} = p_2 L = -2{,}5$; $\rho_{c1} = 1/p_1 C = -2$; $\rho_{c2} = 1/p_2 C = -0{,}4$, а также $i_L(0) = 5$ А; $U_C(0) = 0$; $i_{L,вн} = 11$ А; $U_{C,вн} = 22$ В; $i_{L,св}(0) = -6$ А; $U_{C,св}(0) = -22$ В.

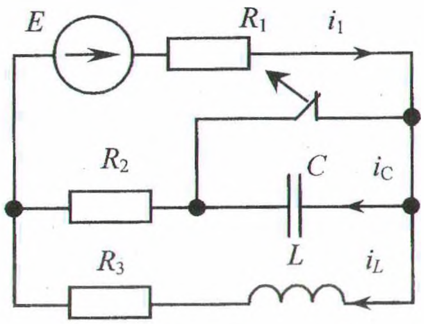

Рис. 1

Пусть

$$u_{C,св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$i_{L,св}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

Составляем свободную цепь для момента $t = 0$ с контурными токами $i_{C,св}(0)$, $i_{L,св}(0)$ (рис. 2).

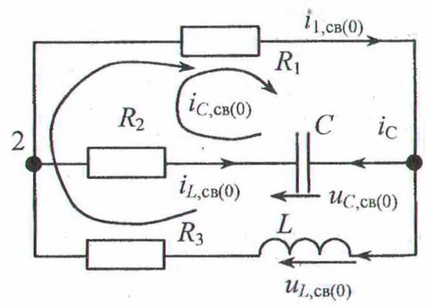

Рис. 2

Согласно (5) получим два уравнения:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= u_{C,св}(0); \\ B_1 + B_2 &= i_{L,св}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Контурные уравнения для токов свободной цепи примут вид

$$\begin{aligned} &u_{C,св}(0) + (R_1 + R_2) i_{C,св}(0) + R_1 i_{L,св}(0) = 0; \\ &i_{L,св}(0)(R_1 + R_3) + \rho_{L1} B_1 + \rho_{L2} B_2 + R_1 i_{C,св}(0) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$i_{C,св}(0) = \frac{A_1}{\rho_{C1}} + \frac{A_2}{\rho_{C2}}.$$

Уравнения (7), (8) образуют систему:

$$A_1 + A_2 = -22;\quad B_1 + B_2 = -6;$$

$$-A_1 - 5A_2 = 20;\quad B_1 + 5B_2 = 0,$$

которая распадается на две независимые подсистемы и имеет решение

$$A_1 = -22{,}5; \quad A_2 = 0{,}5; \quad B_1 = -7{,}5; \quad B_2 = 1{,}5\,.$$

Таким образом, свободные составляющие переменных состояния u_C, i_L имеют вид

$$u_{C,\text{св}}(t) = -22{,}5e^{-t} + 0{,}5e^{-5t};$$

$$i_{L,\text{св}}(t) = -7{,}5e^{-t} + 1{,}5e^{-5t}.$$

Рассмотрим случай комплексных корней характеристического уравнения цепи на рис. 1. Пусть $L = 1$ Гн, $C = 0{,}2$ Ф, а значения остальных элементов прежние. Корни характеристического уравнения:

$$p_1 = -2 + j1{,}5; \quad p_2 = -2 - j1{,}5.$$

Находим CP-сопротивления:

$$\rho_{L1} = -2 + j1{,}5; \quad \rho_{L2} = -2 - j1{,}5;$$

$$\rho_{C1} = 5/(-2 + j1{,}5); \quad \rho_{C2} = 5/(-2 - j1{,}5)$$

и ток

$$i_{C,\text{св}}(0) = A_1(-0{,}4 + j0{,}3) + A_2(-0{,}4 - j0{,}3)\,.$$

Подставив $i_{C,\text{св}}(0)$ в (8) и решив систему уравнений (7), (8), найдем

$$A_1 = -11 - j2; \quad B_1 = -3 + j4\,.$$

Используя (6), получим

$$u_{C,\text{св}} = 2e^{-2t}(-11\cos 1{,}5t + 2\sin 1{,}5t);$$

$$i_{L,\text{св}} = 2e^{-2t}(-3\cos 1{,}5t - 4\sin 1{,}5t).$$

Этот пример показывает, что поиск свободных решений в форме (1), (3) требует действий с комплексными числами.

Найдем *CP*-сопротивления, не требующие действий с комплексными числами. Пусть свободные составляющие ищутся в форме (6):

$$u_{C,\text{св}} = e^{-\delta t}(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t);$$

$$i_{L,\text{св}} = e^{-\delta t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t).$$

Из уравнения динамики *C*-элемента получим

$$i_{C,\text{св}}(t) = Ce^{-\delta t}(\omega A_2 - \delta A_1)\cos\omega t +$$
$$+ Ce^{-\delta t}(-\omega A_1 - \delta A_2)\sin\omega t,$$

что позволяет для косинус- и синус-составляющих $u_{C,\text{св}}$ ввести соответствующие *CP*-проводимости:

$$\frac{1}{\rho_{CC}} = \frac{\omega C A_2}{A_1} - \delta C; \quad \frac{1}{\rho_{CS}} = -\frac{\omega C A_1}{A_2} - \delta C.$$

Для косинус- и синус-составляющих тока $i_{L,\text{св}}$ *CP*-сопротивления имеют соответственно вид

$$\rho_{LC} = \frac{\omega L B_2}{B_1} - \delta L; \quad \rho_{LS} = -\frac{\omega L B_1}{B_2} - \delta L.$$

Проверим полученные формулы повторным расчетом цепи на рис. 1 при комплексных корнях.

Вычисляем коэффициенты A_1, B_1:

$$u_{C,\text{св}}(0) = A_1 = -22; \quad i_{L,\text{св}}(0) = B_1 = -6,$$

а также

$$i_{C,\text{св}}(0) = A_1/\rho_{CC} = \omega C A_2 - \delta C A_1 = 0{,}3A_2 + 8{,}8\,.$$

Подставив эти величины в (8), получим $A_2 = 4$; $B_2 = -8$, что соответствует предыдущим расчетам.

Приведенные примеры показывают, что в число уравнений динамики для цепей второго порядка не требуется включать уравнения для отдельных спектральных составляющих. Это согласуется с числом $k = n - 2$, равным нулю для цепи второго порядка. Следует также отметить, что эффективность предлагаемого в работе метода проявляется в полной мере в цепях более высокого порядка, начиная с $n = 3$.

Литература

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 214.