

Яхновец А. А., ст. преподаватель
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТНОГО НАГРЕВА ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

The problem of definition of a temperature field of the moving environment is considered at contact heating. The mathematical model as the nonlinear differential equation is offered. With use of initial multivariate representations its decision is received. Results of calculations are compared to the data of an experimental research of distribution of temperature in driving steel wire at electrocontact heating.

Контактный нагрев движущейся среды представляет значительный интерес для исследования неравновесных тепловых процессов. При таком нагреве возникает большой градиент температур и достигается значительная величина плотности потока тепла в объеме среды. Процессы данного типа широко используются в технологии, поскольку позволяют получать изделия с высокой степенью однородности структуры. В полиграфической промышленности они находят применение при рулонной офсетной и флексографской печати [1–3].

Ранее в работе [1] был получен в аналитическом виде закон распределения температуры по длине базы нагрева движущейся одномерной среды. Целью данной работы является учет структурных изменений в нагреваемой среде.

Процесс нагрева движущейся среды описывается уравнением

$$c \cdot \gamma \cdot v \cdot \frac{dT(Z)}{dZ} = \frac{J^2}{\phi^2} (\rho_0 \cdot \beta \cdot T(Z) + \rho_0 (1 - 273 \cdot \beta)) - \frac{4\alpha}{d} (T(Z) - T_0) - \frac{4 \cdot \epsilon \cdot \delta}{d} (T(Z)^4 - T_0^4), \quad (1)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность среды; v — кинематическая скорость среды; $T(Z)$ — распределение температуры по базе нагрева; Z — координата на базе нагрева; J — сила тока; ϕ — площадь сечения; ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C ; β — температурный коэффициент сопротивления; d — диаметр или наибольший линейный размер сечения ϕ ; α — коэффициент конвективной теплоотдачи; δ — постоянная Стефана-Больцмана; ϵ — коэффициент серости.

С точки зрения сравнения решения с экспериментальными данными целесообразно рассматривать (1) применительно к контактному нагреву электропроводящей среды (ЭКН). Основным технологическим параметром в этом случае является скорость нагрева среды [3], которая, в свою очередь, сама зависит от таких характеристик, как кинематическая скорость движения среды в зоне нагрева — v , сила тока J (А) или плотность силы тока j , длина базы нагрева l , диаметр d и площадь сечения S .

Скорость нагрева среды определяет как потребляемую мощность, так и прочностные, и эксплуатационные характеристики получаемого в процессе нагрева изделия. При ЭКН скорость нагрева определяется кинематической скоростью v и плотностью тока j . Основная опасность заключается в перегреве среды. Этого можно избежать, если знать зависимость между силой тока и скоростью $J = f(v)$. Указанная зависимость устанавливается в процессе построения математической модели процесса. Одна из простейших моделей, исходящая из баланса энергии по схеме «нагрев — потери» [7], является тем не менее существенно нелинейной. При построении модели в работе используется метод, предложенный в [6].

Достоинством его является возможность сохранить и перенести в решение (1) те параметры, которые фигурируют в дифференциальном уравнении модели.

В правой части (1) первое слагаемое описывает нагрев по закону Джоуля–Ленца, зависимость $\rho(T)$ принята линейная; второе слагаемое описывает конвективную теплоотдачу в газе $\sim T$; третье слагаемое — тепловые потери на излучение $\sim T^4$, при температуре ≈ 1050 К ими уже нельзя пренебречь.

Перейдем в уравнении (1) к новым безразмерным переменным

$$\zeta = \frac{Z}{l}; \quad \theta(\zeta) = \frac{T(Z)}{T_0}, \quad (2)$$

где l — длина базы нагрева; T_0 — температура среды на входе в зону нагрева.

В новых переменных уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d\theta(\zeta)}{d\zeta} = \beta_4 + \beta_3\theta - \beta_0\theta^4, \quad (3)$$

где

$$\beta_0 = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot \delta \cdot T_0^3 \cdot l}{c \cdot \gamma \cdot d \cdot v}, \quad (4)$$

$$\beta_3 = \frac{l}{c \cdot \gamma \cdot v} \left[\frac{J^2 \cdot \rho_0 \cdot \beta}{\phi^2} - \frac{4\alpha}{d} \right], \quad (5)$$

$$\beta_4 = \frac{4 \cdot l (\varepsilon \cdot \delta \cdot T_0^3 + \alpha)}{d \cdot v \cdot c \cdot \gamma} + \frac{J^2 \cdot \rho_0 (1 - 273 \cdot \beta) \cdot l}{c \cdot \gamma \cdot v \cdot T_0 \cdot \phi^2}. \quad (6)$$

Как видно, в задаче (3)—(6) коэффициенты β_4 , β_3 , β_0 зависят от J , v , l , d и являются параметрами модели. Зададим начальные условия задачи:

$$\theta(0) = 1. \quad (7)$$

Согласно [6], уравнение (3) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений. Добавляя новые переменные, обозначим

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \dot{\theta};$$

W — новая переменная такая, что $W(0) = 1$; $\dot{W} = 0$. Уравнение (3) запишется как

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\beta_0 \cdot \theta^4 + \beta_3 \cdot \theta \cdot W^3 + \beta_4 \cdot W^4; \\ \dot{W} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

С помощью W в системе (8) мы записали уравнение в однородной форме. Введем замены переменных еще раз:

$$\theta^3 = u, \quad W^3 = y,$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 3\theta^2 \cdot \dot{\theta} = 3\theta^2 (-\beta_0 \theta^4 + \beta_3 \theta W^3 + \beta_4 W^4) = \\ &= -3\beta_0 \theta^6 + 3\beta_3 \theta^3 W^3 + 3\beta_4 \theta^2 W^4 = -3\beta_0 u^2 + 3\beta_3 u y + 3\beta_4 \theta^2; \end{aligned}$$

в последнем слагаемом использовано специфическое свойство переменной W , что позволило положить $W^4 = 1$. Система (8) превращается в систему (9), если переобозначить переменные и считать их контравариантным четырехвектором:

$$x^1 = \theta, \quad x^2 = u, \quad x^3 = y, \quad x^4 = W, \quad (9)$$

где 1, 2, 3, 4 — индексы нумерации компонент вектора.

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -\beta_0 \cdot x^1 \cdot x^2 + \beta_3 \cdot x^1 \cdot x^3 + \beta_4 \cdot x^3 \cdot x^4; \\ \dot{x}^2 = 3\beta_4 \cdot x^1 \cdot x^1 - 3\beta_0 \cdot x^2 \cdot x^2 + 3\beta_3 \cdot x^2 \cdot x^3; \\ \dot{x}^3 = 0; \\ \dot{x}^4 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Начальные условия системы (10):

$$x^1(0) = 1; \quad x^2(0) = 1; \quad x^3(0) = 1; \quad x^4(0) = 1. \quad (11)$$

Система (10) может быть записана в векторно-матричном виде:

$$\left(\frac{dx(\zeta)}{d\zeta} \right)^i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a^i_{jk} x^j x^k. \quad (12)$$

Здесь по повторяющимся индексам идет суммирование-свертка, знак суммы далее писать не будем.

Система (10) генерирует набор матриц:

$$(a^1_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\beta_0 & \frac{1}{2}\beta_3 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta_3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad (13)$$

$$(a^2_{jk}) = \begin{pmatrix} 3\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\beta_0 & \frac{3}{2}\beta_3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$(a^3_{jk}) = (a^4_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

Решение системы (12) $X(\zeta)$ образует некоторое многообразие $G_4\{X(\zeta)\}$ и на нем с помощью аффинора $\{a^i_{jk}\} = A^i$, ($i = 1, 2, 3, 4$) задаются квадратичные формы, являющиеся правыми частями системы (10). На многообразии G_4 переменным (x^1, x^2, x^3, x^4) соответствует какой-то векторный базис

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4. \quad (16)$$

Аффинор A^i тоже представляют в этом базисе в виде

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 + A^4 e_4, \quad (17)$$

где

$$A^i = (a^i_{jk})$$

В соответствии со схемой предлагаемой Ньюкомом [7], решением системы (10) является ряд

$$x(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^m \cdot a_m, \quad (18)$$

вектор-коэффициенты которого a_m удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$m \cdot a_m = \sum_{j=0}^{m-1} a_j a_{m-1-j}. \quad (19)$$

Таким образом, чтобы построить решение (18) с помощью формулы (19) нужно уметь перемножать вектора многообразия G_4 . Это возможно, если известна алгебра (законы умножения) базисных векторов $e_j \cdot e_k$. В соответствии с [7] получаем

$$e_j \cdot e_k = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 & e_1 e_4 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 & e_2 e_4 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 & e_3 e_4 \\ e_4 e_1 & e_4 e_2 & e_4 e_3 & e_4 e_4 \end{pmatrix} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 + A^4 e_4. \quad (20)$$

Таблица алгебры базисных векторов для многообразия G_4 , образуемого системой (10), (11),

$$\{e_j \cdot e_k\} = \begin{pmatrix} 3\beta_4 e_2 & -\frac{\beta_0}{2} e_1 & \frac{\beta_3}{2} e_1 & 0 \\ -\frac{\beta_0}{2} e_1 & -3\beta_0 e_2 & \frac{3\beta_3}{2} e_2 & 0 \\ \frac{\beta_3}{2} e_1 & \frac{3\beta_3}{2} e_2 & 0 & \frac{\beta_4}{2} e_1 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_4}{2} e_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Рекуррентные соотношения (19) начинаются с вектора a_0 , который выражается через начальные условия:

$$a_0 = x^1(0)e_1 + x^2(0)e_2 + x^3(0)e_3 + x^4(0)e_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad (22)$$

$$a_1 = a_0 a_0 = (\beta_4 + \beta_3 - \beta_0)(e_1 + 3e_2), \quad (23)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}[a_0 a_1 + a_1 a_0] = \frac{1}{2}(\beta_3^2 + 4\beta_0^2 + \beta_4\beta_3 - 4\beta_4\beta_0 - 5\beta_3\beta_0)e_1 + \frac{1}{2}(6\beta_4^2 + 9\beta_3^2 + 18\beta_0^2 + 15\beta_4\beta_3 - 24\beta_4\beta_0 - 27\beta_3\beta_0)e_2, \quad (24)$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(\beta_4 + \beta_3 - \beta_0) \cdot \left\{ (\beta_3^2 + 28\beta_0^2 - 12\beta_4\beta_3 - 20\beta_4\beta_0 - 5\beta_3\beta_0)e_1 \right\} + 6(\beta_4^2 + 9\beta_0^2 + \beta_4\beta_3 - 10\beta_4\beta_0 - 9\beta_3\beta_0)e_2. \quad (25)$$

Так как нас интересует распределение температуры, то дальше рассматриваем только коэффициенты при базисном векторе e_1 из ряда (18). Ограничимся четырьмя первыми слагаемыми ($m = 3$) и получаем $x^1(\zeta) = \theta(\zeta)$. Следовательно,

$$\theta(\zeta) = 1 + (\beta_4 + \beta_3 - \beta_0)(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{2}(\beta_3^2 + 4\beta_0^2 + \beta_4\beta_3 - 4\beta_4\beta_0 - 5\beta_3\beta_0) \times (\zeta - \zeta_0)^2 + \frac{1}{6}(\beta_4 + \beta_3 - \beta_0)(\beta_3^2 + 28\beta_0^2 - 12\beta_4\beta_0 - 20\beta_3\beta_0)(\zeta - \zeta_0)^3 \dots \quad (26)$$

Обратимся к графику распределения температуры по базе нагрева (рисунок). Участок BC сплошной кривой 1 соответствует фазовому переходу второго рода из ферромагнитного состояния в парамагнитное. На нем находится точка перегиба кривой 1. Воспользуемся этим для проверки рассматриваемой модели. Для точки перегиба

$$\frac{d^2\theta[\zeta]}{d\zeta^2} = 0.$$

Это хорошо известно из математического анализа условие. Из выражения (26) получаем, если положить

$$\zeta_0 = 0,$$

следующее выражение:

$$(\beta_4 + \beta_3 - \beta_0)(\beta_3^2 + 28\beta_0^2 - 12\beta_4\beta_0 - 20\beta_3\beta_0)\zeta + (\beta_3^2 + 4\beta_0^2 + \beta_4\beta_3 - 4\beta_4\beta_0 - 5\beta_3\beta_0) = 0. \quad (27)$$

На рисунке приведены полученные в результате расчета распределения температуры в горячей части базы нагрева. Экспериментальные данные взяты для условий электроконтактного нагрева стальной проволоки двух видов — стали-3 и пружинной стали. Температура измерялась оптическим пирометром [1]. Участок AB кривой 2 соответствует низкотемпературному отпуску, снимающему наклеп. Участок BC на обеих кривых соответствует области температур, в которой происходит фазовый переход ферромагнетик–парамагнетик. Точке Кюри соответствует точка B .

Сила тока для кривой 1 $J = 82$ А, скорость движения проволоки в зоне нагрева $v = 3,6$ см/с, коэффициент серости принят $\epsilon = 0,36$, температура на холодном контакте

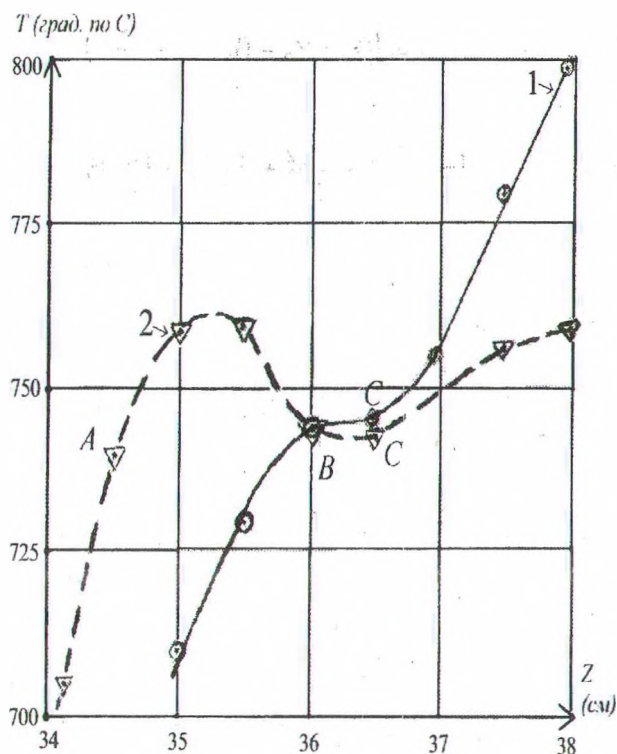


Рис. Сравнение расчетных и экспериментальных значений для распределения температуры: 1 — сталь-3; 2 — пружинная сталь

$T_0 = 290$ К, коэффициент конвективной теплоотдачи $\alpha = 3,7 \cdot 10^{-2}$ Вт/м²·град. Другие величины взяты из справочника [9].

Если в формулу (27) подставить данные для кривой 1, то получается для точки перегиба расчетное значение координаты Z_c , равное 31 см. Можно считать, что Z_c соответствует фазовому переходу. Как видно на рисунке экспериментальное значение для точки B $Z_B = 36$ см. Расхождение между обоими значениями равно 14%.

Наибольшую ошибку в измерениях дает определение яркостной температуры, ошибка составляет ~ 9%. Разность в 5% для такой модели вполне объяснима. Совершенно очевидно, что коэффициент серости должен изменяться вдоль базы нагрева, потому что нагретые участки окисляются и толщина окисной пленки растет с температурой и координатой Z , следовательно, ϵ тоже должен расти. Скорость нагреваемой проволоки 3,6 см/с — не очень высокая скорость, при таких значениях теплопроводность, не учитываемая в уравнении (1), все же участвует в нагреве — поток тепла направлен навстречу потоку массы. Увеличенную в 2,5 раза скорость можно уже практически не учитывать при нагреве изделий из железа и стали. Существенное увеличение скоростей, например на порядок (в 10 или 20 раз), связано с трудностями технического характера — значения силы тока становятся такими большими, что плотность тока близка к критической и ручная подстройка тока и скорости чрезвычайно затруднена, требуется автоматизация процесса измерений.

Таким образом, предлагаемая модель (1) и метод индуктивной алгебры позволяют достаточно хорошо описать процесс нагрева движущейся среды. При этом при проведении расчетов сохраняется аналитическая зависимость решения от технологически важных параметров процесса. Поскольку (1) сводится к безразмерному уравнению (3), то использованный подход можно применять для решения аналогичных уравнений в других областях техники и технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубаник В. В., Шмидт М. П., Яхновец А. А. Расчет температурного поля движущейся среды при электроконтактном нагреве // Труды БГТУ. Сер. IX. Издательское дело и полиграфия. — 2002. — Вып. X.
2. Гриднеев В. Н., Мешков Ю. Я., Ошкадеров С. П., Трефилов В. Н. Физические основы электротермического упрочнения стали. — Киев: Наукова думка, 1977.
3. Романов Д. И. Электроконтактный нагрев металлов. — М.: Машиностроение, 1981.
4. Хакен Г. Синергетика. — М.: Металлургия, 1975.
5. Тявловский М. Д., Кундас С. П., Дереченик С. С. Определение температурных режимов нагрева проволок из тугоплавких металлов при горячем ультразвуковом плющении в вакууме // Металловедение и термическая обработка металлов. — 1984. — № 11.
6. Клубович В. В., Рубаник В. В., Яхновец А. А. К расчету параметров электроконтактного нагрева проволоки на проход. Деп. в ВИНТИ. — 25.02.1988. — № 1546.— В88.
7. Ньюком Р. У. Системы нелинейных дифференциальных уравнений. Канонические многомерные представления // ТИИЭР. — Т. 665. — № 6. — С. 138—145.
8. Безсонов Б. Л., Воловник Г. А. и др. Совмещение процессов волочения и отжига. — М.: ЦИНТИ-электропром, 1961.
9. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1972.