УДК 681.513

С. Е. Жарский, ассистент; И. О. Оробей, доцент; Д. А. Гринюк, ст. преподавтель

УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ОЧИСТКИ ВОДЫ НА ПЕРВИЧНЫХ ОТСТОЙНИКАХ

The article considers the way of evidence of stability for one class nonlinear system, based on Fradkov and Liapunov – Razumikhin theorem. Results are applied to adaptive control system on base capillary suction time for sediments dewatering for water treatment plant.

Система регулирования, или управления процессом очистки воды, по параметрам времени капиллярного впитывания (ВКВ) и электрокинетического потенциала [1] может быть представлена в виде структурной схемы, содержащей нелинейную обратную связь (рис. 1).

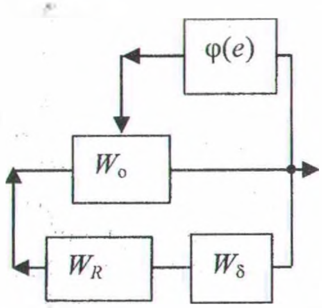

Рис. 1. Структура системы управления с нелинейной обратной связью

На рис. 1 W_R, W_δ, W_o – передаточные функции регулятора, датчика и объекта соответственно; $\varphi(e)$ – нелинейная функция, характеризующая внутреннюю взаимосвязь параметра регулирования с внутренним состоянием объекта управления (рис. 2). При построении сложных адаптивных систем в качестве объекта управления рассматривают не только сам технологический объект (его математическое описание), но и комбинацию его с адаптационной частью системы, представленной в виде математического описания процесса адаптации. При таком подходе в качестве нелинейной функции $\varphi(e)$ можно рассматривать систему измерений параметров состояния вместе с системой формирования изменений в алгоритме управления. Необходимо отметить, что для технологических процессов очистки воды система в контуре нелинейной зависимости $\varphi(e)$ содержит также подсистему определения минимума ВКВ. Такая расширенная система рассмотрена на рис. 1.

Математическая модель системы, представленной рис. 1 в форме вход – выход:

$$e = \frac{b(p)}{a(p)}u + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(e), \qquad (1)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $e = e(t)$ – выходная переменная (рассогласование минимума ВКВ и текущего ВКВ на выходе системы); $b(p) = b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0$; $c(p) = c_r p^r + \ldots + c_1 p + c_0$ и $a(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0$ – полиномы с неизвестными параметрами; $r \le n-1$; передаточная функция $b(p)/a(p)$ имеет относительную степень $\rho = n - m$; полином $b(p)$ гурвицев и $b_m > 0$. Неизвестная функция $\varphi(e)$, характеризующая нелинейность (рис. 2), удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(0) = 0\,; \qquad (2)$$

$$0 \le \frac{\varphi(e)}{e} \le C_0\,;\ \forall\ e \ne 0, \qquad (3)$$

где число C_0 полагается неизвестным.

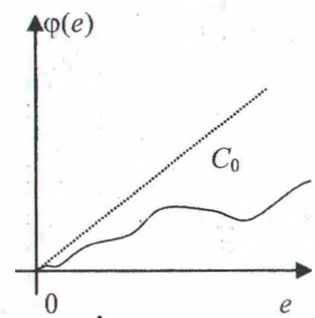

Рис. 2. Вид нелинейности внутренней обратной связи

Для предлагаемой на рис. 1 системы управления по ВКВ параметр имеет всегда положительное значение от минимального, поэтому определять функцию $\varphi(e)$ в отрицательной области значений отклонения нет необходимости. Аналогичное положение можно выдвинуть для любой экстремальной системы управления с адаптивной подстройкой коэффициентов регулирования по данному методу.

Цель управления состоит в том, чтобы, используя только измерения выходного сигнала, найти закон управления, обеспечивающий стремление выходной переменной объекта управления $e(t)$ к нулю при $t \to \infty$.

Примем вид алгоритма управления

$$u = -\alpha(p)(\mu + k)\hat{e}\,, \qquad (4)$$

где $\mu > \mu_0$ и полином $\alpha(p)$ степени $\rho - 1$ выбираются из соображений гурвицевости полинома $\alpha(p) + \mu b(p)\alpha(p)$; положительный параметр k предназначен для компенсации неопределенности $\varphi(e)$, а функция $\hat{e}(t)$ является оценкой (в нашем случае измерением) выхода $e(t)$ модели (1). Закон управления (4) технически реализуем, так как содержит известные и измеряемые сигналы.

Доказательство опирается на предложенную в [2] методику. Данная схема доказательства представляет общий подход, демонстрирующий возможность управления системой (1) на основании теоремы Фрадкова А. Л.

Заменим структуру модели наблюдателя [2] на следующую модель датчика:

$$W_\partial(p) = \frac{k_\partial e^{-\tau p}}{T_\partial p + 1}. \tag{5}$$

В соответствии с [2, 3] необходимо обеспечить порядок системы, используемой в качестве наблюдателя, не менее чем $\rho - 1$, а на выходе датчика требуется установить низкочастотный фильтр. В принципе, этот фильтр может входить в состав самого датчика по алгоритму обработки полезного сигнала. Расширение до порядка $\rho - 1$ в связи с требованием необходимого порядка дифференцируемости $\hat{e}(t)$ приводит к представлению модели датчика (5) с фильтром низкой частоты в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\beta}_1 = \sigma\beta_2;\\ &\dot{\beta}_2 = \sigma\beta_3;\\ &\vdots\\ &\dot{\beta}_{\rho-1} = \sigma\left(-k_1\beta_1 - \ldots - k_{\rho-1}\beta_{\rho-1} + R_1 e(t-\tau)\right); \end{aligned} \tag{6}$$

$$\hat{e} = \beta_1. \tag{7}$$

Выбором коэффициентов k_i систему (6) и (7) можно сделать асимптотически устойчивой. Это позволяет сформулировать утверждение о том, что матрица Γ удовлетворяет условию

$$L^{-1}\Gamma^T + \Gamma L^{-1} < -F, \tag{8}$$

где положительно определенная матрица $F > 0$. Тогда $\upsilon(\beta) = \beta^T L^{-1}\beta$ функция Ляпунова для системы (6)–(7).

Перепишем систему в матричной форме. Матрица Γ определяется из (6)–(7) в матричной форме:

$$\dot{\beta} = \sigma\left(\Gamma\beta + dR_1 e(t-\tau)\right),\ \hat{e} = h^T\beta,$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{\rho-1} \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},\ h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для системы (4), (6), (7) по теореме Фрадкова может быть составлена функция Ляпунова:

$$V = x^T P x + \beta^T L^{-1}\beta. \tag{9}$$

Определим ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + \dot{\beta}^T L^{-1}\beta + \beta^T L^{-1}\dot{\beta} = \\ &= x^T A^T P x + \left(-k\cdot e + (\mu + k)\varepsilon\right) B^T P x + \\ &+ \varphi(e) q^T P x + x^T P A x + \left(-k\cdot e + (\mu+k)\varepsilon\right) x^T P B + \\ &+ \varphi(e) x^T P q + \sigma\beta^T \Gamma L^{-1}\beta + \sigma e(t-\tau) R_1 d^T L^{-1}\beta + \\ &+ \sigma\beta^T L^{-1}\Gamma\beta + \sigma e(t-\tau) R_1 \beta^T L^{-1} d. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T\left(A^T P + PA\right)x + 2\left(-k\cdot e + (\mu+k)\varepsilon\right)e + \\ &+ \varphi(e)\left(q^T P x + x^T P q\right) + \sigma\beta^T\left(\Gamma L^{-1} + L^{-1}\Gamma\right)\beta + \\ &+ \sigma e(t-\tau) R_1\left(d^T L^{-1}\beta + \beta^T L^{-1} d\right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{gathered} \varepsilon = h^T\beta;\ 2x^T P q \varphi(e) \le \delta x^T P q q^T P x + \delta^{-1}[\varphi(e)]^2; \\ 2\beta^T h B^T P x \le \delta x^T P B B^T P x + \delta^{-1}\beta^T h h^T \beta; \\ -keB^T P x = -ke^2;\ 2\sigma R_1 e(t-\tau) d^T L^{-1}\beta \le \\ \le \sigma R_1 k \beta^T L^{-1} d d^T L^{-1}\beta + \sigma R_1 k^{-1}\left[e(t-\tau)\right]^2, \end{gathered}$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le x^T\left(A^T P + PA\right)x - ke^2 + \\ &+ (\mu+k)\delta x^T P B B^T P x + (\mu+k)\delta^{-1}\beta^T h h^T\beta + \\ &+ \delta x^T P q q^T P x + \delta^{-1}[\varphi(e)]^2 + \\ &+ \sigma\beta^T\left(\Gamma L^{-1} + L^{-1}\Gamma\right)\beta + \sigma R_1 k \beta^T L^{-1} d d^T L^{-1}\beta + \\ &+ \sigma R_1 k^{-1}\left[e(t-\tau)\right]^2, \end{aligned}$$

где $0 < \delta < 1/2$ и выполнено условие

$$\begin{gathered} \left(A^T P + PA\right) + (\mu+k)\delta P B B^T P + \\ + \delta P q q^T P = -Q_1 + (\mu+k)\delta P B B^T P + \\ + \delta P q q^T P = -Q_2 < 0. \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -x^T Q_2 x - ke^2 + (\mu+k)\delta^{-1}\beta^T h h^T\beta + \delta^{-1}\left[\varphi(e)\right]^2 + \\ &+ \sigma\beta^T\left(\Gamma L^{-1} + L^{-1}\Gamma\right)\beta + \sigma R_1 k\beta^T L^{-1} d d^T L^{-1}\beta + \\ &+ \sigma R_1 k^{-1}\left[e(t-\tau)\right]^2. \end{aligned}$$

Далее выберем σ так, чтобы

$$\begin{gathered} \sigma\left(\Gamma L^{-1} + L^{-1}\Gamma\right) + (\mu+k)\delta^{-1} h h^T + \\ + \sigma R_1 k \beta^T L^{-1} d d^T L^{-1}\beta < 0. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\dot{V} \le -x^T Q_2 x - ke^2 + \delta^{-1}\left[\varphi(e)\right]^2 -$$

$$-\beta^T Q_2 \beta + \sigma R_1 k^{-1}\left[e(t-\tau)\right]^2.$$

Выберем R_1 так, чтобы $\sigma R_1 = 1$. Это приводит к выражению вида

$$\dot{V} \le -x^T Q_2 x - ke^2 + \delta^{-1}\left[\varphi(e)\right]^2 -$$

$$-\beta^T Q_2 \beta + k^{-1}\left[e(t-\tau)\right]^2.$$

Принимая во внимание асимптотический характер устойчивости системы (6), (7), можно произвести замену $e(t-\tau) \le E_0 e(t)$, где E_0 – скорость уменьшения ошибки. Тогда, выбирая величину k так, чтобы выполнялось соотношение

$$k > \left[C_0\right]^2 / \delta + E_0{}^2 / k,$$

получаем

$$\dot{V} \le -x^T Q_2 x - ke^2 - \beta^T Q_2 \beta. \qquad (10)$$

Выражение (10) соответствует экспоненциальному характеру устойчивости системы (1), (6), (7) с управлением (4) и функцией Ляпунова (9).

По сравнению с чистым применением теоремы Разумихина [3] данное доказательство предъявляет более слабые требования к ограничениям на функции нелинейностей. Ограничения налагаются на саму функцию, но не требуется ограниченность первой производной, что расширяет класс нелинейных функций φ, для которых применима схема доказательства устойчивости управления данного вида (4). Снижение требований к классу функций позволяет расширить возможности подстройки коэффициентов алгоритма управления, не выходя при этом за пределы непрерывных адаптивных систем и применяя дискретные измерения (при наличии достаточной степени сглаживания этих измерений или достаточно высокой частоте дискретизации). Такая возможность обеспечивает анализ внутреннего состояния системы без перехода к классу систем с поэтапной адаптацией [4].

Литература

1. Жарский С. Е. Система управления процессом водоочистки с представлением аппарата в виде объекта с распределенными параметрами // Труды БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. – 2005. – Вып. – XIII. – С. 144–147.

2. Бобцов А. А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за командным сигналом с компенсацией паразитного эффекта внешнего неограниченного возмущения // АиТ. – 2005. – № 8. – С. 108–117.

3. Горбунов А. В. Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием // АиТ. – 2005. – № 10.– С. 42–53.

4. Теряев Е. Д., Шамриков Б. М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление. – М.: Наука, 1999. – 330 с.