УДК 621.9

А. В. Овсянников, доцент; В. В. Лихавицкий, ассистент

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

There is a plenty of software intended for the statistical analysis and the forecast of time numbers. However in many cases their use is inexpedient and inefficient from the point of view of spent time for training of work in the system (Matlab, Statistica, etc.). Existing narrow direction programs initially written on languages With, Pascal, etc. demand from developers of serious expenditures of labour directly on programming. In this connection the problem has been put, to take the most of computing means of system Matlab and during too time to give to the user an end-product which is not demanding system Matlab. In result the program prognoz has been developed.

Существует большое количество программных средств, предназначенных для статистического анализа и прогноза временных рядов. Однако во многих случаях их использование является нецелесообразным и неэффективным с точки зрения затрачиваемого времени на обучение работы в самой системе (Matlab, Statistica и др.). Существующие узконаправленные программы, изначально написанные на языках С, Pascal и др., требуют от разработчиков серьезных трудозатрат непосредственно по программированию. В связи с этим была поставлена задача: максимально использовать вычислительные средства системы Matlab и в тоже время предоставить пользователю конечный продукт, не требующий самой системы Matlab. В результате была разработали программу PROGNOZ.

Программа PROGNOZ предназначена для экспресс-анализа и прогноза временных рядов. Она выполняет следующие функции: осуществляет ввод данных временного ряда (из файла, из головного окна программы, ввод тестовых данных); анализирует введенные данные (проверку стационарности, нормальности, периодичности); осуществляет функцию фильтрации введенных данных; прогнозирует временной ряд на основе моделей авторегрессионной, полиномиальной и гармонической модели.

Все расчетные результаты работы программы PROGNOZ записываются в корневой каталог на диске в виде файла c:\protokol.txt.

Программа PROGNOZ является законченным программным продуктом и не требует дополнительных вычислительных средств. Программа реализована в системе Matlab и скомпилирована Matlab Compiler.

Структура программы состоит из трех блоков. Первый блок (I) предназначен для ввода и экспресс-анализа временного ряда на стационарность, нормальность и периодичность. Проверка на стационарность осуществляется на основе критериев серий, инверсий, оценки коэффициента корреляции. Проверка на нормальность производится с помощью критерия согласия χ^2, оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса и построения гистограммы. Оценка периодичности – на основе автокорреляционной функции и текущего спектра. Результаты работы I блока программы выдаются в виде текстовой и графической информации.

Второй блок (II) осуществляет выделение из временного ряда произвольных гармонических (сезонных) составляющих с помощью многополосного фильтра. В программе есть возможность выбора фильтра с первой полосой пропускания или с первой полосой задержания.

В третьем блоке (III) программы производится выбор модели для прогнозирования (гармоническая, авторегрессионная, полиномиальная), ее идентификация и непосредственно прогноз по этой модели. Выбор модели осуществляется пользователем самостоятельно на основе анализа расчетов, полученных в I и II блоке программы. Совместно с прогнозом на произвольное количество шагов вперед рассчитываются ошибки прогноза для доверительных вероятностей 0,7 и 0,95.

В качестве тестовых данных используются гармоническая, авторегрессионная и полиномиальная модель (рис. 1).

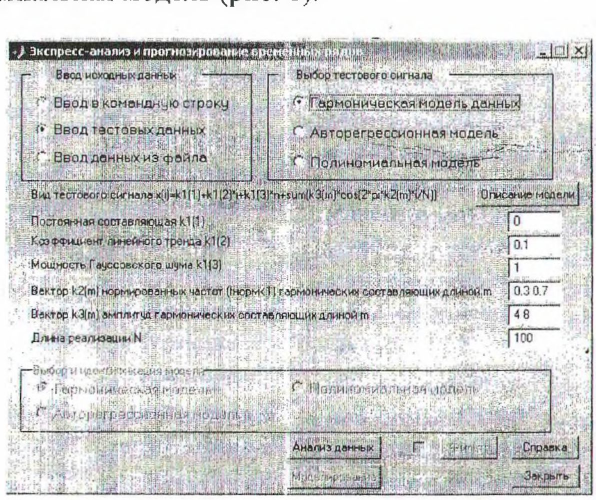

Рис. 1

Гармоническая модель данных представляется в виде

$$x(i) = k1_1 + k1_2 \cdot i + k1_3 \cdot n(i) + \\ + \sum_m k3_m \cdot \cos\left(2\pi \cdot k2_m \cdot \frac{i}{N}\right), \quad (1)$$

где N – длина реализации временной последовательности ($N \geq 30$); $k1$ – вектор коэффициентов $k1 = [k1_1, k1_2, k1_3]$; $k1_1$ – коэффициент, характеризующий наличие в модели постоянной составляющей; $k1_2$ – коэффициент, характеризующий наличие в модели линейного тренда (коэффициент наклона); $k1_3$ – коэффициент, характеризующий мощность гауссовского шума в модели ($k1_3 \geq 0$); $k2_m = 2f_m / N$ – вектор коэффициентов (нормированных частот $k2_m$, $m = 1, 2, ...$), характеризующий наличие гармонических составляющих в модели. Частоты должны задаваться нормированными к единице ($k2_m \leq 1$) и должно выполняться условие $2f_m < N$. Количество m задаваемых частот не ограничено. Частоты задаются в диалоговом окне через пробел. Программа автоматически подсчитывает количество заданных частот. $k3$ – вектор коэффициентов (амплитуд) длиной m для соответствующих гармонических составляющих. Амплитуды задаются в диалоговом окне через пробел. Длина вектора амплитуд должна соответствовать длине вектора частот.

Авторегрессионная модель имеет вид

$$x(i) = k1_1 + k1_2 \cdot i + k1_3 \cdot n(i) + \\ + k2_1 \cdot x(i-1) + ... + k2_p \cdot x(i-p), \quad (2)$$

где $k1$ – вектор коэффициентов $k1 = [k1_1, k1_2, k1_3]$ по смыслу аналогичен коэффициентам, описанным для модели (1); $k1_1$ – коэффициент, характеризующий наличие в модели постоянной составляющей; $k1_2$ – коэффициент, характеризующий наличие в модели линейного тренда (коэффициент наклона); $k1_3$ – коэффициент, характеризующий мощность гауссовского шума в модели ($k1_3 \geq 0$); $k2$ – вектор коэффициентов авторегрессии длиной p. Вектор коэффициентов $k2$ задается в диалоговом окне через пробел.

Для работы с авторегрессионной моделью также необходимо указать длину реализации N и начальное значение $X0$, относительно которого будет производиться расчет значений авторегрессионной модели.

Задаваясь различными коэффициентами в векторе $k2$, можно исследовать стационарные и нестационарные авторегрессионные модели.

Пусть, например, $k1_1 = 0$ и $k1_2 = 0$. Тогда из (2) получаем

$$x(i) = k2_1 \cdot x(i-1) + k2_2 \cdot x(i-2) + ... + \\ + k2_p \cdot x(i-p) + k1_3 \cdot n(i). \quad (3)$$

Обозначим оператором сдвига назад ∇, определяемым, как $\nabla x(i) = x(i-1), ..., \nabla^p x(i) = x(i-p)$ и разностным оператором со сдвигом назад $\Delta x(i) = x(i) - x(i-1) = (1-\nabla)x(i)$. С учетом введенных обозначений характеристическое уравнение модели (3) будет иметь вид

$$K(\nabla) = 1 - k2_1\nabla - k2_2\nabla^2 - ... - k2_p\nabla^p = \\ = \prod_{j=1}^{p}(1 - G_j\nabla) = 0, \quad (4)$$

где G_j^{-1} – корни характеристического уравнения.

Таким образом, стационарность авторегрессионной модели (3) будет обеспечиваться при условии $|G_j| < 1$.

Автокорреляционная функция модели (3) имеет вид

$$R(i) = k2_1 \cdot R(i-1) + \\ + k2_2 \cdot R(i-2) + ... + k2_p \cdot R(i-p) \quad (5)$$

с общим решением

$$R(i) = a_1 G_1^i + a_2 G_2^i + ... + a_p G_p^i. \quad (6)$$

Если кратные корни отсутствуют, то возможны два случая. Корень G_j действителен и член $a_j G_j^i$ в (6) убывает с ростом номера i как член геометрической прогрессии. Это случай затухающей экспоненты. Если пара корней G комплексно сопряжена, то они образуют в (6) член $aC^i \sin(2\pi fi + \theta)$ вида затухающей синусоиды.

Таким образом, автокорреляционная функция стационарного процесса авторегрессии состоит из совокупности затухающих экспонент и затухающих синусоид.

Стационарная дисперсия процесса авторегрессии и его спектр определяются выражениями

$$D_x = \frac{D_n \cdot k1_3^2}{1 - k2_1 \cdot R(1) - k2_2 \cdot R(2) - ... - k2_p \cdot R(p)}, \quad (7)$$

$$S(f) = \frac{2D_n}{\left|1 - k2_1 \cdot e^{-i2\pi f} - ... - k2_p \cdot e^{-i2\pi pf}\right|^2}, \\ 0 \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Вид полиномиальной модели данных

$$x(i) = k1_1 + k1_2 \cdot i + k1_3 \cdot i^2 + ... + \\ + k1_{p+1} \cdot i^p + k2 \cdot n(i), \quad (9)$$

где $k1$ – вектор коэффициентов, характеризующий полиномиальный тренд модели

$k1 = [k1_1, k1_2, ..., k1_{p+1}]$; $k2$ – коэффициент, характеризующий мощность гауссовского шума в модели ($k2 \geq 0$).

Для работы с полиномиальной моделью также необходимо указать длину реализации N.

Задаваясь различными коэффициентами в векторе $k1$, можно исследовать различные нестационарные полиномиальные модели.

Анализ данных осуществляется путем нажатия кнопки на главном диалоговом окне программы «Анализ данных».

После нажатия кнопки «Анализ данных» появляется два окна: графическое и текстовое (рис. 2, 3), т. е. становится доступной нижняя часть головного окна программы.

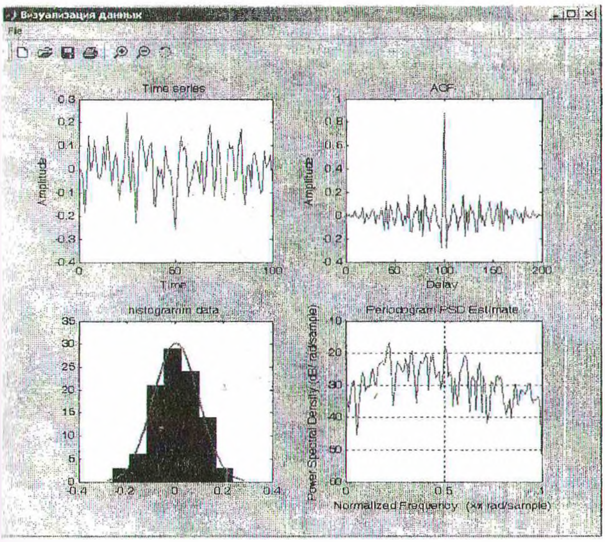

Рис. 2. Графическое окно – визуализация анализа данных

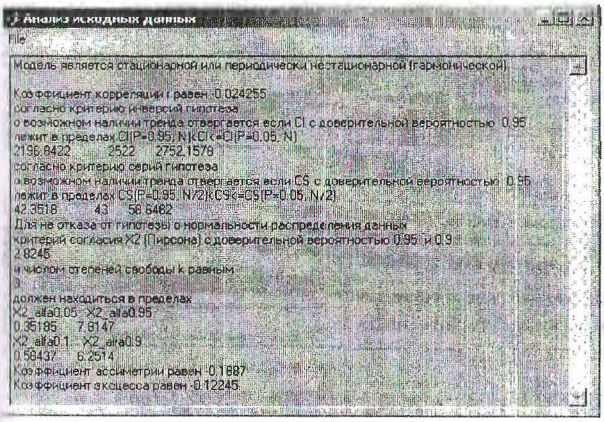

Рис. 3. Текстовое окно – расчетные параметры анализа данных

В графическом окне (рис. 2) представлены графики временного ряда исходных данных; автокорреляционной функции исходных данных; периодограммы исходных данных; гистограмма исходных данных.

Анализ графической информации в сочетании с рассчитанными параметрами позволяет судить о стационарности, периодичности и нормальности исходного временного ряда. Автокорреляционная функция (ACF) – о стационарности, периодичности и нормальности исследуемого временного ряда.

Для стационарного временного ряда характерно относительно быстрое экспоненциальное затухание ACF и небольшой по абсолютной величине (порядка единиц) центральный пик. Наличие периодических колебаний в ACF свидетельствует о наличии периодических составляющих во временном ряде. Такой ряд можно отнести к периодически нестационарным.

Периодограмма используется для обнаружения и оценок амплитуды гармонических компонент, скрытых случайным шумом.

Известно, что спектральная плотность и корреляционная функция связаны между собой парой преобразования Фурье. Спектр временного ряда будет являться широкополосным (без явно выраженных выбросов), если ACF имеет узкий центральный пик. Такие процессы называются широкополосными и относятся к стационарным. В противном случае при относительно широкой ACF спектр оказывается узкополосным, в нем имеются явно выраженные пики, т. е. исходный ряд содержит гармонические компоненты.

Гистограмма является приближенной оценкой неизвестной плотности распределения временного ряда. Она позволяет судить о законе распределения статистического временного ряда. Для удобства сравнения на гистограмму наносится автоматически гауссовская кривая распределения.

В текстовое окно расчетных данных (рис. 3) выводится информация о расчетных параметрах, которые также как и визуализация позволяют судить о стационарности, периодичности и нормальности исходного временного ряда.

Проверка реализаций на наличие трендов может быть выполнена различными способами. Если известно выборочное распределение оценок, то можно воспользоваться статистическими критериями. Знание выборочного распределения оценок среднего квадрата требует знания частотной структуры процесса. Обычно при проверке стационарности эти сведения отсутствуют. Поэтому более желательно применение непараметрических критериев, при использовании которых не требуется знать выборочные распределения оценок. В программе используются два таких непараметрических критерия. Это критерий серий и критерий инверсий. Последний, представляет собой более мощное средство для обнаружения монотонных трендов в данных наблюдений.

Таким образом, анализ стационарности модели можно осуществить с помощью критерия инверсии, критерия серий, а также оценки коэффициента корреляции (рис. 3).

Наиболее просто проверить, подчиняются ли реализации стационарного случайного процесса нормальному закону, измерив плотность вероятности значений процесса и сравнив ее с теоретическим нормальным распределением. Если длина реализации достаточно велика и ошибки измерения малы по сравнению с отклонениями функции от нормальной кривой, то несоответствие ее нормальному распределению будет очевидно. Если выборочное распределение оценки плотности вероятности известно, можно применить критерии нормальности даже в том случае, когда статистические ошибки велики. Однако, как и в случае проверки стационарности, при нахождении выборочного распределения оценки плотности вероятности необходимо знать частотную структуру процесса. Такого рода сведения на практике получить трудно. Следовательно, более желательно применять непараметрические критерии. Один из наиболее удобных непараметрических критериев нормальности распределения – это критерий согласия хи-квадрат (χ^2).

Известно, что коэффициенты асимметрии и эксцесса характеризуют форму закона распределения. Если значение коэффициента эксцесса и асимметрии незначимо отличается от нуля ($|\gamma| \le 0{,}2...0{,}3$), то закон распределения может быть принят нормальным. Тот же вывод характерен и для коэффициента асимметрии.

Кнопка «Фильтр» предназначена для выявления (выделения) из спектра исходного временного ряда (периодограммы) полосы или группы полос частот с помощью полосового фильтра. Указанная процедура может быть полезна для выявления в исходном временном ряду периодических (сезонных) скрытых в шуме составляющих.

Программа использует два типа фильтра: многополосный фильтр с первой полосой пропускания и многополосный фильтр с первой полосой задержания.

Частотная полоса для анализа нормирована и принадлежит диапазону [0…1].

Параметры фильтра:

– порядок фильтра (целое неотрицательное число) должен выбираться меньше трети от длины исходного временного ряда (порядок < N/3);

– тип фильтра «0» или «1». При установке в диалоговом окне «0» реализуется многополосный фильтр задержания, а при установке «1» – многополосный фильтр пропускания;

– вектор частот $W = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n]$, где $0 < \omega_i < 1$. Частоты, соответствующие значениям 0 и 1, устанавливаются программой автоматически и не входят в вектор W.

В результате проведенного анализа становится доступной нижняя часть головного окна программы (рис. 4), в которой осуществляется выбор, идентификация модели и прогноз временного ряда по выбранной модели.

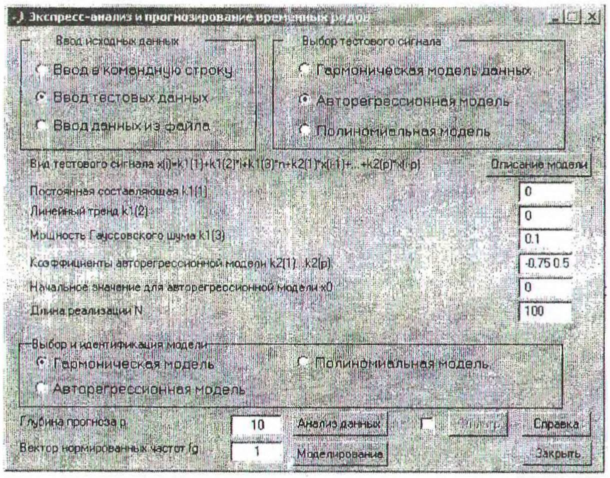

Рис. 4

Доступными для выбора являются следующие модели: гармоническая, авторегрессионная, полиноминальная.

Гармоническая модель прогноза имеет вид

$$y(i) = B_1 + B_2 \cdot i + \sum_{n=3} B_n \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot i), \qquad (10)$$

где B_1, B_2 – коэффициенты, характеризующие смещение и наличие линейного тренда в исходном временном ряде; B_3, B_4, … – коэффициенты, характеризующие численные значения амплитуд гармонических составляющих.

Для работы с моделью необходимо указать глубину прогноза p (количество шагов прогноза); вектор нормированных к единице частот f_n, для которых будут рассчитываться значения B_n.

Вектор нормированных частот f_n выбирается исходя из анализа периодограммы. Параметры p и f_n указываются в двух диалоговых окнах головного окна программы.

В качестве авторегрессионной модели предлагается использовать следующую:

$$y(i) = B_1 + B_2 \cdot i + B_3 \cdot y(i-1) + ... + B_n \cdot y(i-n), \qquad (11)$$

где B_1, B_2 – коэффициенты, характеризующие смещение и наличие линейного тренда в исходном временном ряде; B_3, B_4, … – коэффициенты, характеризующие вклад (вес) предыдущих значений.

Для работы с моделью необходимо указать глубину прогноза p (количество шагов прогноза); порядок авторегрессионной модели n.

Порядок авторегрессионной модели не должен превышать величины (0,1…0,3) от длины исходного временного ряда N.

В качестве полиномиальной модели используется следующая:

$$y(i) = B_1 + B_2 \cdot i + B_3 \cdot i + ... + B_{n+1} \cdot i^n , \qquad (12)$$

где B_1, B_2, …, B_{n+1} – коэффициенты, характеризующие наличие полиномиального тренда.

Для работы с моделью необходимо в диалоговых окнах головного окна программы указать глубину прогноза p (количество шагов прогноза); порядок полиномиальной модели n. Порядок полиномиальной модели рекомендуется выбирать из условия $n \leq 4$.

После выбора модели и указания в двух нижних диалоговых окнах головного окна программы, глубины прогноза и параметра выбранной модели следует нажать кнопку «Моделирование». Результаты моделирования представляются в виде графического и текстового окна (рис. 5, 6).

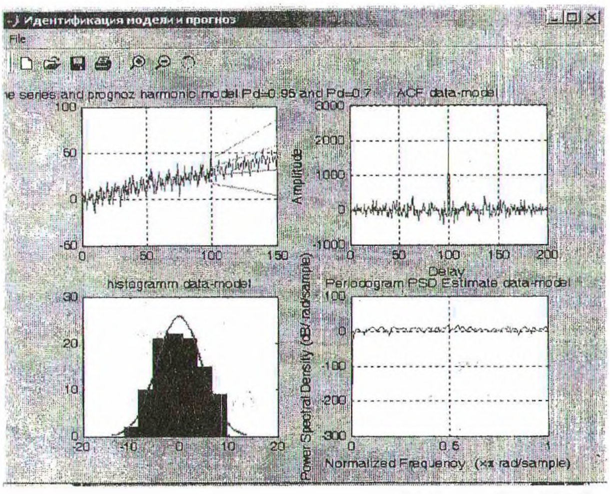

Рис. 5

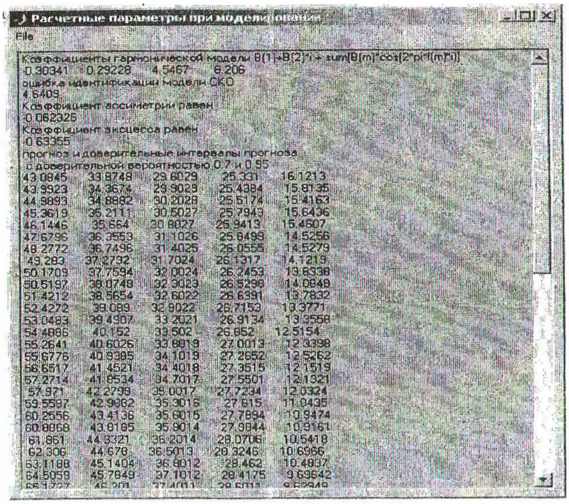

Рис. 6

В графическом окне «Идентификация модели и прогноз» представлены временная реализация и прогноз по выбранной модели на p шагов вперед, а также доверительные интервалы прогноза для доверительных вероятностей $P_д = \{0{,}7;\ 0{,}95\}$; автокорреляционная функция разности данных исходного временного ряда и данных, полученных по выбранной модели (автокорреляционная функция остатков – ACF data-model); гистограмма остатков (histogram data-model); периодограмма остатков.

В текстовом окне программы приводится информация о виде модели и рассчитанных коэффициентах; численное значение ошибки идентификации модели (СКО); коэффициенты асимметрии и эксцесса остатков; численные значения прогноза и доверительные интервалы для доверительных вероятностей $P_д = \{0{,}7;\ 0{,}95\}$ на глубину прогноза p.

Правильность выбора модели подтверждается и тем, что спектр остатков является полностью широкополосным, не имеющим пиков, т. е. полностью образованным шумами измерений и не несущим никакой информационной составляющей.

Литература

Пустыльник Е. Н. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968.