УДК 519.72

Сипайло С. В., ассистент; Долгова Т. А., доцент

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИММЕТРИИ БЕЛОРУССКИХ ОРНАМЕНТОВ

The mathematical group theory apparatus is used for the analysis of Belarusian folk ornaments. The description of ornamental patterns based on the principle of superposition of symmetry groups is made. The possibility of applying the approach to synthesizing a great variety of Belarusian ornamental patterns is examined.

Применение информационных технологий в полиграфическом производстве предоставляет широкие возможности автоматизации производственного процесса, многие из которых реализованы еще не полностью. Одним из направлений автоматизации полиграфического производства является компьютерный синтез цифровых изображений на этапе допечатной подготовки. В отечественной полиграфии практически отсутствуют средства синтеза орнаментальных изображений, которые могут найти применение при разработке оформления издательской и специальной полиграфической продукции.

Вопросы автоматизации процесса создания цифровых изображений белорусских орнаментов уже затрагивались в работе [1], где была дана общая характеристика белорусских орнаментов и разработан способ синтеза наиболее простых орнаментальных фигур на основе теории симметрии. Дальнейшим шагом в разработке принципов синтеза белорусских орнаментов является анализ наиболее распространенных групп симметрических преобразований и выявление характерных сочетаний групп подструктур гетерогенных орнаментальных изображений. Это позволит в дальнейшем реализовать синтез сложных орнаментальных комплексов из объектов более низкого структурного уровня.

Симметрия [2] является одним из характерных свойств большинства орнаментов, в том числе и белорусских. Она характеризует способность фигуры совмещаться с самой собой в результате проведения определенных преобразований, называемых симметрическими.

Для характеристики симметрии фигур используется такое фундаментальное понятие современной математики, как группа [3].

Группой называется множество элементов G произвольной природы, в котором:

1) задано правило (групповая операция), согласно которому любой паре (a, b) элементов G сопоставляется некоторый элемент $a*b$ того же множества;

2) групповая операция ассоциативна, т. е. для любых элементов a, b и c из G $(a*b)*c = = a*(b*c)$;

3) в G имеется нейтральный (единичный) элемент, т. е. такой элемент e, что для любого a из G $a*e = e*a = a$;

4) у каждого элемента a в G есть симметричный (обратный), т. е. такой элемент a', что $a*a' = a'*a = e$.

Перечисленные свойства 1—4 называют аксиомами группы.

Если группа состоит из конечного числа, то она называется конечной группой, а число элементов в ней — порядком элементов группы.

Поскольку орнаментальные изображения являются двухмерными, то их симметрические преобразования сводятся к преобразованиям плоскости (в частном случае — движениям плоскости).

В случае преобразований плоскости групповой операцией является композиция (последовательное выполнение) преобразований $(\cdot)$, нейтральным элементом выступает тождественное преобразование (id), а симметричным элементом — обратное преобразование (f^{-1}).

Таблица 1

Композиция симметрических преобразований группы D_n

D_n	R^l	$R^l \cdot m$
R^k	R^{k+l}	$R^{k+l} \cdot m$
$R^k \cdot m$	$R^{k-l} \cdot m$	R^{k-l}

Группа симметрии Sym(Ф) плоской фигуры Ф является подгруппой преобразований плоскости, содержащей множество всех преобразований, при которых Ф переходит в себя [4].

Если рассматривать орнаменты с точки зрения симметрии, то их можно разбить на три разновидности [2]:

1) односторонние розетки;
2) бордюрные орнаменты;
3) сетчатые орнаменты.

Односторонние розетки относятся к классу конечных фигур с полярной плоскостью. Принадлежность к конечным фигурам означает, что розетки имеют хотя бы одну неэквивалентную с точки зрения симметрии точку (так называемую «особенную» точку), а наличие полярной плоскости говорит об отсутствии горизонтально ориентированных элементов симметрии.

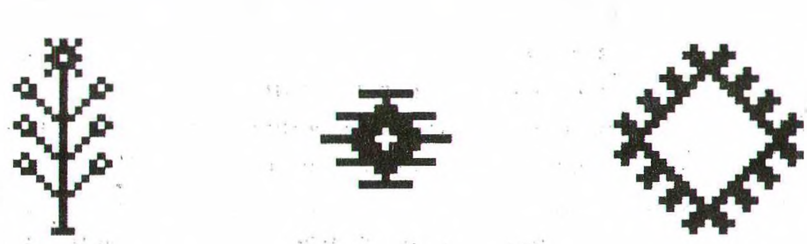
Установлено [4], что все множество групп симметрии односторонних розеток ограничено двумя видами групп движений плоскости: C_n и D_n. Группа C_n состоит из n поворотов на углы, кратные $360°/n$, вокруг одной и той же оси (поворотной оси симметрии n-го порядка). Группа вида C_n образована одним порождающим элементом (угол $360°/n$) и его «степенями» (углы $360° \cdot k/n$, где k — целое число, а k/n — несократимая дробь). Такого рода группы, образованные одним элементом, называются циклическими. Группа D_n содержит элементы группы C_n, а также n отражений относительно плоскостей симметрии, проходящих через поворотную ось и расположенных через каждые $180°/n$. Порождающими элементами группы D_n являются элементарный угол поворота $360°/n$ и одна из плоскостей симметрии m, поскольку любой элемент группы можно представить в виде k-й степени поворота $R^k = 360° \cdot k/n$ или ее композиции с плоскостью симметрии m.

Порождающие элементы группы D_n связаны между собой отношениями [4]:

$$S^2 = \mathrm{id};\ S \cdot R \cdot S = R^{-1};\ R^n = \mathrm{id}. \tag{1}$$

Исходя из этих соотношений, можно в общем виде получить таблицу композиции симметрических преобразований группы D_n (табл. 1).

Изучение изображений белорусских розеточных орнаментов, приведенных в книге «Беларускі арнамент. Ткацтва. Вышыўка» [5], которая содержит около 600 цветных и черно-белых иллюстраций, показало, что симметрия таких орнаментов, как правило, описывается группами D_1, D_2 и D_4 (см. рис.).



а *б* *в*

Рис. Белорусские орнаменты в виде розеток: *а* — розетка с группой симметрии D_1; *б* — розетка с группой симметрии D_2; *в* — розетка с группой симметрии D_4

В результате анализа изображений белорусских орнаментов, выполненных в виде односторонних розеток, также обнаружено, что они часто представляют собой сложные составные фигуры. При несовпадении симметрических групп составных частей гетерогенной фигуры происходит понижение ее симметрии. Согласно принципу суперпозиции групп симметрии для гетерогенных систем [2] группа симметрии G гетерогенного геометрического объекта является общей подгруппой групп симметрии частей G_i, что можно записать в виде следующей формулы:

$$G = \bigcap_i G_i \, . \tag{2}$$

На основе принципа суперпозиции можно более детально описать симметрию белорусских орнаментальных розеток. В результате рассмотрения гетерогенных фигур было выявлено 4 разновидности симметрии белорусских розеточных орнаментов, а при более углубленном структурировании их перечень может быть расширен. Изображения розеток из [5] и соответствующие им комбинации групп симметрии составных частей приведены в табл. 2.

Бордюрные и сетчатые орнаменты относятся к бесконечным фигурам, которые не имеют особенных точек. Характерной чертой бордюрных и сетчатых фигур, как и в случае односторонних розеток, является наличие полярной плоскости. В случае бордюров одной из симметрических операций является параллельный перенос изобразительного элемента в одном направлении, а в случае сетчатых орнаментов — в двух направлениях.

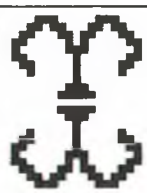
Симметрия орнаментов, выполненных в виде бесконечных фигур, описывается группами бесконечного порядка. Наличие параллельных переносов в одном и двух направлениях ограничивает возможные элементы симметрии осями параллельного переноса, плоскостями скользящего отражения (соответствуют последовательному проведению переноса и отражения), плоскостями симметрии, а также осями симметрии 2-го порядка (бордюры) и осями симметрии 2-го, 4-го и 6-го порядков (сетчатые орнаменты). Доказано [2], что симметрия бордюров исчерпывается семью типами групп, а сетчатых орнаментов — семнадцатью.

Симметрия сетчатых орнаментов описывается так называемыми «плоскими кристаллографическими группами» или «орнаментальными группами» [4], которые представляют собой «дискретные группы движений плоскости, имеющие ограниченную фундаментальную область».

Под дискретностью группы понимается наличие ненулевого расстояния между точками, эквивалентными с позиций симметрии любой данной точке плоскости.

Таблица 2

Симметрия розеточных белорусских орнаментов

Группа симметрии	Образец орнамента	Группа симметрии	Образец орнамента
D_1		D_4	
D_2		$D_2 = D_2 \cap D_4$	

Под фундаментальной областью для группы движений G понимается область на плоскости, обладающая следующими свойствами:

1) любая точка плоскости принадлежит множеству точек, эквивалентных точке этой области;

2) никакие две внутренние точки области не могут быть переведены друг в друга преобразованием группы G.

Самой простой орнаментальной группой является группа $p1$, порожденная двумя переносами на неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Более сложные группы симметрии сетчатых орнаментов также содержат два параллельных переноса и тем самым включают в себя подгруппу $p1$. В общем случае фундаментальные области орнаментальной группы и подгруппы параллельных переносов не совпадают. В терминологии [4] фундаментальная область орнаментальной группы образует «мотив орнамента», а фундаментальная область подгруппы параллельных переносов — «орнаментальную ячейку», площадь которой кратна площади мотива. Таким образом, сетчатый орнамент образуется путем переноса орнаментальной ячейки по двум направлениям.

В результате изучения изображений сетчатых белорусских орнаментов выяснилось, что среди них наиболее распространены группы симметрии *p4mm* и *pmm2*. Несколько реже встречается группа симметрии *cmm*2. Примеры орнаментов с указанными группами симметрии и расположение элементов симметрии в пределах орнаментальной ячейки приведены в табл. 3. При этом *n*-угольники изображают оси симметрии порядка *n*, сплошные линии — плоскости симметрии *m*, штриховые лини — плоскости скользящего отражения ($\tilde{a}, \tilde{b}$), а штрихпунктирные линии — оси переноса *a*, *b*. При обозначении групп симметрии использованы международные символы симметрии и символы А. В. Шубникова [2].

Наибольшее распространение среди бордюрных белорусских орнаментов получили группы симметрии *pmm*2 (комбинация оси переноса с плоскостями симметрии и осью симметрии 2-го порядка) и *pm*11 (комбинация оси переноса с плоскостью симметрии, перпендикулярной направлению переноса). Менее распространены, но все же имеют место группы *p*1 (простой параллельный перенос), *pma*2 (комбинация оси переноса, плоскости скользящего отражения и плоскости симметрии, перпендикулярной оси переноса), *p*1*a*1 (скользящее отражение), *p*1*m*1 (комбинация оси переноса с плоскостью симметрии, параллельной направлению переноса) и *p*112 (комбинация оси переноса с осью симметрии 2-го порядка). Примеры бордюрных орнаментов с вышеперечисленными группами симметрии приведены в табл. 4.

При детальном изучении орнаментов в виде бесконечных фигур видно, что они, как и розетки, представляют собой составные структуры, часто с различной симметрией частей. Кроме того, если выделить розетку, заключенную внутри орнаментальной ячейки, и рассматривать ее симметрию изолированно от симметрии сетчатой фигуры, нередко можно обнаружить более высокую степень симметрии по сравнению с симметрией ячейки.

Таким образом, рассматривая белорусские сетчатые орнаменты как составные объекты и изучая их на различных структурных уровнях, на основе принципа суперпозиции групп симметрии в рамках одной орнаментальной группы можно выделить несколько ее разновидностей, различающихся группами симметрии составных структур. Аналогичный подход может быть использован и при описании симметрии бордюрных орнаментов.

По результатам исследования структуры 125 изображений сетчатых и 166 изображений бордюрных орнаментов, приведенных в книге «Беларускі арнамент. Ткацтва. Вышыўка» [5], было выявлено 22 разновидности сетчатых орнаментов и 29 разновидностей бордюрных орнаментов. При этом симметрия гетерогенных фигур как пересечение групп симметрии составных частей описывалась с использованием более

Таблица 3

Симметрия сетчатых белорусских орнаментов

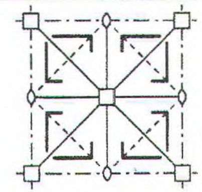
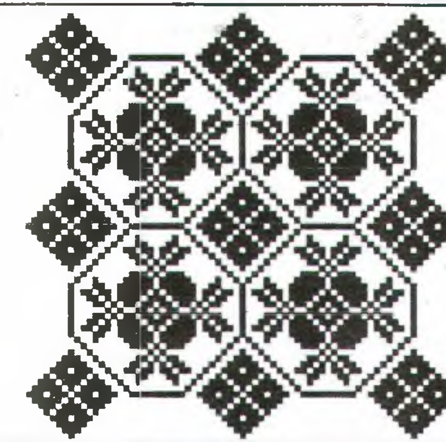
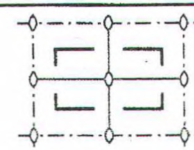
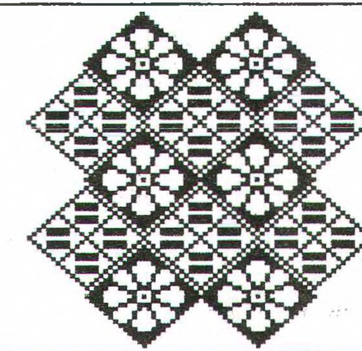
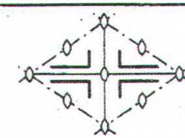
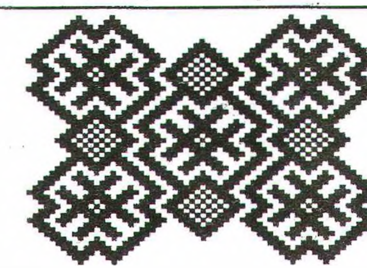
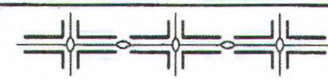
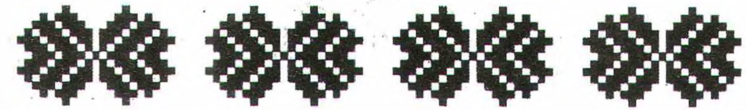
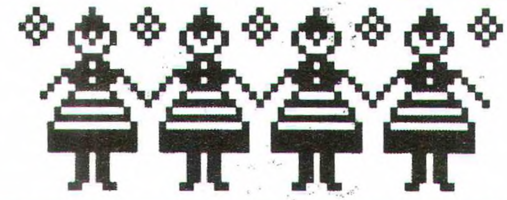
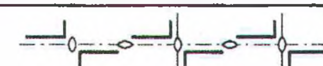
Группа симметрии	Символ симметрии Шубникова	Орнаментальная ячейка	Образец орнамента
p4mm	(a:a):4·m		
pmm2	(b:a):2·m		
cmm2	(a/a):2·m		

Таблица 4

Симметрия бордюрных белорусских орнаментов

Группа симметрии	Символ симметрии Шубникова	Проекции элементов симметрии бордюров на плоскость	Образец орнамента
*pmm*2	(a):2·m		
*pm*11	(a):m		
*p*1	(a)		
*pma*2	(a)·ã :m		
*p*1*a*1	(a)·ã		
*p*1*m*1	(a)·m		
*p*112	(a):2		

удобных для этих целей символов симметрии А. В. Шубникова. Также при описании сетчатых белорусских орнаментов, учитывая их мозаичный характер, симметрия переносов по горизонтальным и вертикальным направлениям и симметрия переносов вдоль осей, ориентированных под углом 45° относительно горизонтали или вертикали, рассматривались отдельно. В последнем случае при обозначении оси переноса использовался индекс *d*.

При описании симметрии бесконечных фигур было установлено, что многие белорусские орнаменты представляют собой сочетание двух или трех симметричных структур, наложение которых часто приводит к понижению симметрии составной фигуры. При этом многие бордюры (в частности, часть бордюров с симметрией $[(a):2\cdot m]\cap[(a):2\cdot m]$, $[(a):\{2\cdot m\cap 4\cdot m\}]\cap[(a):2\cdot m])$, $[(a):\{2\cdot m_1\cap 4\cdot m_1\}]\cap[(a):2\cdot m_2]\cap[(a):\{2\cdot m_2\cap 4\cdot m_2\}]$, $[(a):\{2\cdot m\cap 4\cdot m\}]\cap \cap[(a):2\cdot m]\cap[(a/2):2\cdot m]$) имеет происхождение от сетчатых орнаментов в результате выделения из последних узкого фрагмента. Вместе с тем встречаются бордюрные и сетчатые орнаменты, не имеющие составных бесконечных фигур.

Наиболее распространенными среди белорусских сетчатых орнаментов из [5] являются орнаменты с симметрией $(a{:}a){:}4\cdot m = [(a{:}a){:}4\cdot m]\cap[(a{:}a){:}4\cdot m]$ (наложение двух сетчатых структур, 27 рисунков, например, первый рисунок из табл. 3), $(a_d{:}a_d){:}4\cdot m = [(a_d{:}a_d){:}4\cdot m]\cap \cap[(a_d{:}a_d){:}4\cdot m]$ (наложение двух сетчатых структур, 17 рисунков), $(a{:}a){:}4\cdot m$ (отсутствие наложения сетчатых структур и пересечения симметрии сетки с симметрией розеток, 15 рисунков), $(a{:}a){:}4\cdot m = [(a{:}a){:}4\cdot m]\cap[(a{:}a){:}4\cdot m]\cap[(a_d{:}a_d){:}4\cdot m]$ (пересечение симметрии трех сетчатых структур, 14 рисунков), $(a_d{:}a_d){:}4\cdot m$ (отсутствие наложения сетчатых структур и пересечения симметрии сетки с симметрией розеток, 8 рисунков).

Применительно к изображениям бордюрных орнаментов, приведенных в [5], к наиболее часто встречающимся разновидностям симметрии можно отнести следующие: $(a){:}m$ (отсутствие наложения нескольких бордюрных структур и пересечения с симметрией розеток, 25 рисунков), $(a){:}2\cdot m = [(a){:}2\cdot m]\cap[(a){:}2\cdot m]$ (наложение двух бордюрных структур, 21 рисунок), $(a){:}2\cdot m$ (отсутствие наложения нескольких бордюрных структур и пересечения с симметрией розеток, 20 рисунков, например, первый рисунок из табл. 4), $(a){:}2\cdot m = = [(a){:}2\cdot m]\cap[(a){:}2\cdot m] = [(a){:}\{2\cdot m\cap 4\cdot m\}]\cap[(a){:}2\cdot m])$ (наложение двух бордюрных структур в сочетании с пересечением симметрии одной из структур с симметрией розеток, 18 рисунков), $(a){:}2\cdot m = (a){:}\{2\cdot m\cap 4\cdot m\}$ (пересечение симметрии бордюрной структуры с симметрией розеток, 16 рисунков), $(a){:}m = [(a){:}m]\cap[(a){:}m]$ (наложение двух бордюрных структур, 10 рисунков).

Таким образом, принцип суперпозиции групп симметрии для составных систем позволяет выполнить более детальное описание симметрии орнаментов, результаты которого могут быть использованы в целях компьютерного синтеза орнаментальных изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сипайло С. В. Разработка принципа синтеза белорусских орнаментов // Издательско-полиграфический комплекс на пороге третьего тысячелетия: Материалы Междунар. науч.-техн. конф. / БГТУ. — Мн., 2001. — С. 133—138.

2. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972. — 340 с.

3. Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980. — 144 с.

4. Дужин С. В., Чеботаревский Б. Д. От орнаментов до дифференциальных уравнений. — Мн.: Вышэйшая школа, 1988. — 253 с.

5. Кацар М. С. Беларускі арнамент. Ткацтва. Вышыўка / Навук. рэд. Я. М. Сахута. — Мн.: БелЭн, 1996. — 208 с.