УДК 519.17:512

В. В. Смелов, канд. техн. наук

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СРУКТУРЫ БИНАРНОГО ДЕРЕВА

In the work we use algebraic method for present structure of binary tree.

Практически любому опытному программисту в той или иной степени приходилось сталкиваться со структурами данных, организованных в виде бинарных деревьев. При этом оказывается полезным иметь информацию о структуре бинарного дерева для дальнейшего анализа, сравнения или преобразования. В теории графов структура деревьев, как правило, представляется в виде матриц смежности или инцидентности [4], в программировании традиционно используются двухсвязаные списки [1, 2, 5]. В данной статье предлагается еще один метод формализации, основанный на представлении структуры бинарного дерева в виде алгебраического выражения.

Приведем основные определения, которые потребуются далее. ***Бинарное дерево*** – это набор вершин, который может быть: а) либо пустым; б) либо разбит на три непересекающиеся части: вершину, называемую ***корнем***, бинарное дерево, называемое ***левым поддеревом*** корня, и бинарное дерево, называемое ***правым поддеревом*** корня [3]. Далее нас будут интересовать только структурные свойства бинарных деревьев, и мы не будем различать два бинарных дерева, если они имеют одинаковую структуру (являются изоморфными [4] или подобными [1]). ***Пустое (нулевое) бинарное дерево*** – бинарное дерево, не содержащее ни одной вершины и обозначаемое символом $\mathbf{o}$. ***Единичное бинарное дерево*** – бинарное дерево, состоящее из одной вершины и обозначаемое далее символом $\boldsymbol{\varepsilon}$. ***Тривиальными бинарными*** деревьями будем называть пустое и единичное деревья. Пустое бинарное дерево или бинарное дерево, состоящее из корня, левого поддерева и пустого правого поддерева, будем называть **α-деревом**. При этом если левое бинарное поддерево α-дерева является единичным, то такое α-дерево будем называть ***элементарным α-деревом*** (рис. 1). Пустое бинарное дерево или бинарное дерево, состоящее из корня, пустого левого поддерева и любого правого поддерева, будем называть **β-деревом**. При этом если правое бинарное поддерево β-дерева является единичным, то такое β-дерево будем называть ***элементарным*** **β-деревом** (рис. 1). Обратим внимание, что множество тривиальных бинарных деревьев является пересечением множества α-деревьев и множества β-деревьев. В дальнейшем элементарные α-деревья и β-деревья будем обозначать просто $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Введем операции умножения и сложения для $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (рис. 1). Кроме того, будем полагать истинным следующие утверждения:

$$\varepsilon\alpha = \alpha,\ \varepsilon\beta = \beta, \tag{1}$$

$$\varepsilon + \alpha = \alpha + \varepsilon = \alpha,\ \varepsilon + \beta = \beta + \varepsilon = \beta, \tag{2}$$

$$\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon, \tag{3}$$

$$o\alpha = o,\ o\beta = o, \tag{4}$$

$$o + \alpha = \alpha + o = \alpha,\ o + \beta = \beta + o = \beta, \tag{5}$$

$$o + o = o, \tag{6}$$

$$o + \varepsilon = \varepsilon + o = \varepsilon. \tag{7}$$

Обратим внимание на следующее:

1) операция сложения коммутативна, но определена только между α и β-деревьями;

2) операция умножения не коммутативна;

3) ε играет роль нуля в операциях сложения и роль единицы в операциях умножения;

4) введенные обозначения и операции позволяют однозначно определить все бинарные деревья с числом вершин, не превышающим три.

Введем операцию умножения справа произвольного бинарного дерева d на элементарное дерево. Произведением бинарного дерева d на $\boldsymbol{\alpha}$ будем называть бинарное дерево $d\boldsymbol{\alpha}$, состоящее из левого поддерева, совпадающего с d, и пустого правого поддерева. Аналогично: бинарное дерево $d\boldsymbol{\beta}$ состоит из пустого левого поддерева и правого поддерева, совпадающего с d. В соответствии с приведенными выше определениями $d\alpha$ является α-деревом, а произведение $d\boldsymbol{\beta}$ – β-деревом. По всей видимости, для всех бинарных α и β-деревьев, кроме ε, справедливы и обратные утверждения: любое α-дерево можно представить как произведение $d\boldsymbol{\alpha}$, а любое β-дерево – как произведение $d\boldsymbol{\beta}$, где d – бинарное дерево. Поэтому для явного обозначения таких α и β-деревьев будем использовать запись в виде произведений $d\boldsymbol{\alpha}$ или $d\boldsymbol{\beta}$ соответственно.

Обобщим операцию сложения. Сложение определим только между α-деревом и β-деревом. Кроме того, будем считать, что

$$d\alpha + \varepsilon = \varepsilon + d\alpha = d\alpha,\ d\beta + \varepsilon = \varepsilon + d\beta = d\beta, \tag{8}$$

$$o + d\beta = d\beta + o = d\beta,\ o + d\alpha = d\alpha + o = d\alpha. \tag{9}$$

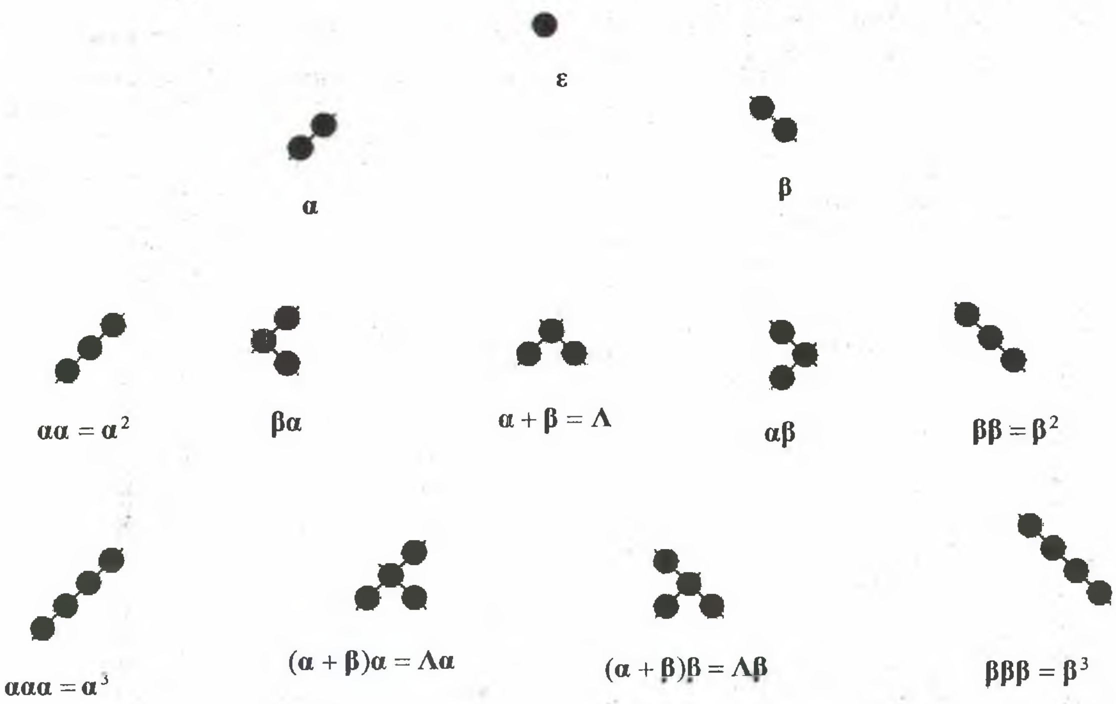

Рис. 1. Бинарные деревья: ε – единичное дерево; α – элементарное α-дерево; β – элементарное β-дерево; $\alpha\alpha = \alpha^2$, $\beta\alpha$, $\alpha + \beta = \Lambda$, $\alpha\beta$, $\beta\beta = \beta^2$ – произведения и сумма элементарных деревьев; $\alpha\alpha\alpha = \alpha^3$, $(\alpha + \beta)\alpha = \Lambda\alpha$, $(\alpha + \beta)\beta = \Lambda\beta$, $\beta\beta\beta = \beta^3$ – примеры бинарных деревьев

Суммой $u\boldsymbol{\alpha}$ и $v\boldsymbol{\beta}$ называется бинарное дерево $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$, состоящее из корня, левого поддерева, совпадающего с u, и правого поддерева, совпадающего с v.

Теорема 1. *Если d – бинарное дерево, то существуют два таких бинарных дерева u и v, что $d = u + v$. Если d не тривиальное бинарное дерево, то существуют два таких бинарных дерева u и v, что $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$.*

Доказательство. Доказательство следует из определений бинарного дерева, операций сложения и умножения, а также утверждений (1–9). Пусть k – число вершин бинарного дерева d. Тогда очевидно, для $k = 0$ $d = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ и для $k = 1$ $d = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{o} = \boldsymbol{\varepsilon}$ теорема выполняется. Если d бинарное дерево, имеющее $k > 1$ вершин, то, по определению, оно состоит из трех непересекающихся частей: корневой вершины, левого поддерева (обозначим его символом u) и правого поддерева (обозначим v). Тогда, по определению операции сложения, $u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$ – это бинарное дерево, состоящее из корня, левого поддерева u и правого поддерева v, т. е. $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$. Теорема доказана.

Рассмотрим множество всех выражений вида $d = u + v$, которые можно построить с помощью введенных выше обозначений и операций. При этом будем применять скобки для обозначения приоритетности операций (если это необходимо), опускать $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{o}$ (если это не вызывает двусмысленности), а также использовать сокращения: $\boldsymbol{\alpha\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha\alpha\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^3$, ..., $\boldsymbol{\alpha\alpha...\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^n$, $\boldsymbol{\beta\beta} = \boldsymbol{\beta}^2$, $\boldsymbol{\beta\beta\beta} = \boldsymbol{\beta}^3$ ..., $\boldsymbol{\beta\beta...\beta} = \boldsymbol{\beta}^n$, $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\Lambda}$. Кратность повторения подряд одного и того же символа будем называть его степенью. Например, на рис. 2 изображено бинарное дерево, которому соответствует следующее выражение:

$$(\boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha} + ((\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha\alpha} + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta\beta})\boldsymbol{\beta\beta\beta}.$$

Используя введенные сокращения, можем получить более компактную запись $(\boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^2 + (\boldsymbol{\Lambda\alpha}^2 + \boldsymbol{\Lambda\beta}^2)\boldsymbol{\beta}^3$. Обозначим множество всех возможных таких выражений символом T, а элементы этого множества символами $t_i, i \in \{1, 2, ...\}$. Подмножество выражений, описывающих деревья с числом вершин, равным n, будем обозначать T_n. Все выражения, принадлежащие множеству T, для краткости будем называть t-выражениями. Кроме того, t-выражение будем называть правильным выражением, если а) оно не содержит выражений, стоящих левее последнего знака равенства в утверждениях (1–9); б) при суммировании слева от знака «+» всегда записывается α-дерево. Очевидно, что любое t-выражение можно привести к правильному выражению, сделав подстановки (1–9) и установив правильный порядок суммирования. Два

t-выражения будем считать эквивалентными, если их можно привести к общему правильному выражению.

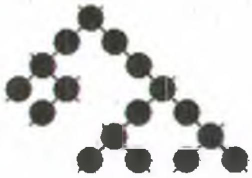

Рис. 2. Бинарное дерево:
$$(\alpha\beta+\alpha)\alpha^2+(\Lambda\alpha^2+\Lambda\beta^2)\beta^3$$

Почти очевидны следующие утверждения:

1) если t правильное t-выражение, описывающее бинарное дерево d с числом вершин более одной, то число ребер этого дерева совпадает с суммой степеней всех α и β, входящих в t;

2) существует взаимно однозначное соответствие между всеми бинарными деревьями и описывающими их правильными t-выраже-ниями;

3) если t правильное t-выражение и описывающее бинарное дерево с n вершинами, то сумма степеней всех α и β, входящих в t, равна $n-1$.

Последнее утверждение является следствием первых двух и известного свойства деревьев [3, 4]. Для обозначения суммы степеней α и β в t-выражение t ниже используется символ $|t|$. В дальнейшем будем рассматривать только правильные t-выражения и не будем различать бинарное дерево d, описывающее его правильное t-выражение t и графическое изображение дерева d. Более того, будем говорить, что $t \in T$ – бинарное дерево, имеющее $|t|$ ребер и $|t|+1$ вершин; T – множество всех бинарных деревьев; T_n – множество всех бинарных деревьев, имеющих n вершин и т. д.

Рекурсивно определим специальный тип бинарного дерева, называемый ***цепью***:

1) $\mathbf{o}$, ε, α и β – это цепи;

2) если $t\alpha$ или $t\beta$ цепь, то t тоже цепь.

Будем говорить, что цепь t^* является ***делителем цепи*** t_1, если t_1 можно представить в виде $t_1=t_1't^*$. При этом t_1' будем называть ***частным*** деления цепи t_1 на цепь t^* и обозначать $t_1'=t_1/t^*$. Кроме того, считаем, что $t/t=\varepsilon$. Будем далее говорить, что цепи t_1 и t_2 имеют ***общий делитель*** t^*, если эти цепи можно представить в виде $t_1=t_1't^*$ и $t_2=t_2't^*$, где t_1', t_2', t^* – цепи. Если при этом $|t^*|$ принимает максимально возможное значение, то такой делитель будем называть ***наибольшим общим делителем***.

Введем коммутативные операции объединения и пересечения для двух цепей, предварительно установив:

1) $\alpha\cap\beta=\varepsilon$;

2) если t – цепь, то $t\cap\mathbf{o}=\mathbf{o}$;

3) если $t\neq\mathbf{o}$ – цепь, то $t\cap\varepsilon=\varepsilon$ и $t\cup\varepsilon=t$.

Пусть t_1 и t_2 – две произвольные бинарные цепи. Тогда:

1) если t_1 и t_2 имеют наибольший общий делитель t^*, то $t_1\cap t_2=t^*$ и $t_1\cup t_2=(t_1/t^*+t_2/t^*)t^*$;

2) если общего делителя не существует, то $t_1\cup t_2=t_1+t_2$;

3) если не существует общего делителя и $t_1\neq\mathbf{o}$, $t_2\neq\mathbf{o}$, то $t_1\cap t_2=\varepsilon$.

Заметим, что множество всех бинарных цепей замкнуто относительно операции пересечения, а сама эта операция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, поэтому ее можно обобщить для любого числа цепей, не заботясь о расстановке скобок при записи. Например, $t_1\cap t_2\cap t_3=\bigcap_{i=1}^{3}t_i$ – бинарная цепь, являющаяся пересечением трех цепей t_1, t_2 и t_3. Относительно операции объединения пока можно сказать, что она коммутативна и множество цепей не является замкнутым относительно этой операции.

Обобщим операции объединения и пересечения. Пусть $d\alpha$ – α-дерево, тогда объединением $d\alpha$ и цепи t называется бинарное дерево $d\alpha\cup t=(d\cup t/\alpha)\alpha$, если α является делителем t и $d\alpha\cup t=d\alpha+t$ в другом случае. Аналогично определим объединение β-дерева $d\beta$ и цепи t: если β является делителем t, то $d\beta\cup t=(d\cup t/\beta)\beta$; иначе $d\beta\cup t=d\beta+t$. Пересечением $\mathbf{d}\alpha$ и t называется бинарное дерево $d\alpha\cap t=(d\cap t/\alpha)\alpha$, если α делитель t, или $d\alpha\cap t=\varepsilon$, если α не является делителем t. Аналогично определим $d\beta\cap t=(d\cap t/\beta)\beta$, если β является делителем t, и $d\beta\cap t=\varepsilon$ в другом случае. Пусть $d=u\alpha+v\beta$ – бинарное дерево и t – цепь. Тогда объединением бинарного дерева d и цепи t будем называть бинарное дерево $d\cup t=(u\alpha\cup t)+v\beta$, если t имеет делитель α и $d\cup t=u\alpha+(v\beta\cup t)$, если t имеет делитель β. Обобщенная операция объединения бинарных цепей является ассоциативной, это позволяет не использовать скобок при записи операции объединения более двух цепей. Пересечением дерева $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$ и цепи t будем называть бинарное дерево $d \cap t = (u\boldsymbol{\alpha} \cap t) + (v\boldsymbol{\beta} \cap t)$.

Теорема 2. *Любое бинарное дерево, может быть представлено в виде объединения конечного множества цепей.*

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по k – числу вершин бинарного дерева. Для $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ утверждение теоремы очевидно. Убедимся, что для $k = 3$ теорема выполняется: действительно, $\boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\beta}^2$, $\boldsymbol{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{\beta\alpha}$ – цепи, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta}$ – по определению. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех $k \leq n$. Докажем справедливость теоремы для всех бинарных деревьев с числом вершин, равным $n+1$. Пусть d – бинарное дерево, имеющее $n+1>1$ вершину. Тогда по теореме 1: $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$, где u и v бинарные деревья, причем с числом вершин, не превышающим n. Прежде всего заметим, что по определению $u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta} = u\boldsymbol{\alpha} \cup v\boldsymbol{\beta}$. По индуктивному предположению с учетом последнего утверждения имеем $d = \left(\bigcup_{k=1}^{m} a_k\right)\alpha \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s} b_k\right)\beta$, где символы a_k и b_k обозначают бинарные цепи. Рассмотрим отдельно следующее выражение: $\left(\bigcup_{k=1}^{m} a_k\right)\boldsymbol{\alpha} = \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} a_k \cup a_m\right)\boldsymbol{\alpha} = (d_{m-1} \cup a_m)\boldsymbol{\alpha}$, где d_{m-1} – бинарное дерево. По определению, $(d_{m-1} \cup a_m)\boldsymbol{\alpha} = d_{m-1}\boldsymbol{\alpha} \cup a_m\boldsymbol{\alpha}$. Рассуждая далее аналогично, получим, что $\left(\bigcup_{k=1}^{m} a_k\right)\alpha = \bigcup_{k=1}^{m} a_k\alpha = a_1\alpha \cup a_2\alpha \cup \ldots \cup a_m\alpha$ и убедимся в справедливости теоремы: $d = a_1\alpha \cup a_2\alpha \cup \ldots \cup a_m\alpha \cup b_1\beta \cup b_2\beta \cup \ldots \cup b_s\beta$. Теорема доказана.

Пусть d – бинарное дерево, тогда множество $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ таких цепей, что $d = \bigcup_{k=1}^{m} t_k$ будем называть ***разложением*** d на цепи, а число $h[d] = \max_k |t_k|$ – ***глубиной*** бинарного дерева d.

Теорема 3. *Пусть d – не пустое бинарное дерево, тогда максимальное число различных не нулевых цепей в разложении дерева d равно $|d|+1$.*

Доказательство. Доказательство будем осуществлять по индукции числа ребер $|d|$ в дереве d. При $|d| = 0$ возможен один вариант: $d = \boldsymbol{\varepsilon}$ и теорема выполняется. При $|d| = 1$ возможны два варианта: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cup \boldsymbol{\varepsilon}$. При $|d| = 2$ возможны пять вариантов: $\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\beta} \cup \boldsymbol{\beta}^2$, $\boldsymbol{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{\beta\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\beta} \cup \boldsymbol{\beta\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta}$. Отметим, что $\boldsymbol{\varepsilon}$ всегда входит в разложение с максимальным числом элементов. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для $1 \leq |d| \leq n$. Докажем, что при $|d| = n+1$ максимальное число различных ненулевых цепей в разложении d равно $n+2$.

Действительно, если d – бинарное дерево и $|d| = n+1 > 1$, тогда $d = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta} = u\boldsymbol{\alpha} \cup v\boldsymbol{\beta}$ и $|u| + |v| = n-1$. Кроме того, $u\boldsymbol{\alpha} \cap v\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}$. Пусть $|u| = k$, тогда $|v| = n-1-k$ и по индуктивному предположению максимальное число ненулевых цепей в разложении u равно $k+1$, а в разложении v соответственно $n-k$. Тогда $u\boldsymbol{\alpha} = \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} t_i\right)\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cup \bigcup_{i=1}^{k} t_i\right)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{k} t_i\boldsymbol{\alpha}$ и, по всей видимости, искомое разложение $u\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon} \cup \boldsymbol{\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{k} t_i\boldsymbol{\alpha}$ и содержит $k+2$ цепи. Аналогично рассуждая, получим $n-k+1$ элементов в разложении $v\boldsymbol{\beta}$. Учитывая, что $u\boldsymbol{\alpha} \cap v\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}$, вычислим максимальное число различных ненулевых цепей в разложении бинарного дерева d: $k+2+n-k+1-1 = n+2$. Теорема доказана.

Множество V цепей, входящих в разложение бинарного дерева d на максимальное число ненулевых цепей, будем называть далее ***максимальным разложением или множеством вершин*** дерева d, элементы этого множества называть ***вершинами бинарного дерева*** d, а цепи, соответствующие вершинам, ***координатами*** этих вершин. Кроме того, будем считать, что нулевому бинарному дереву соответствует пустое множество вершин $\{\varnothing\}$. Достаточно просто доказывается единственность множества вершин V для любого дерева d.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ – множество вершин бинарного дерева d. Обозначим t_k координаты вершин $v_k \in V$, $k = \overline{1, n+1}$. Определим на множестве V бинарное отношение $R \subset V \times V$ следующим образом: элементами $r_{k,m} \in R$ являются такие упорядоченные пары $\langle v_k, v_m \rangle$, что $\{v_k, v_m\} \subset V$ и для соответствующих координат выполняется равенство $|t_k \cap t_m| = \max(|t_k|,|t_m|) - 1$. Будем называть далее множество R ***множеством дуг*** бинарного дерева d. Очевидно, что отношение R является симметричным, т. е. если $r_{k,m} \in \overline{E}$, то и $r_{m,k} \in \overline{E}$. Введем специальное обозначение для неупорядоченных пар $e_{k,m} = \{r_{k,m}, r_{m,k}\}$ и для определенности будем считать, что $k < m$. Тогда множество E всех таких пар будем называть ***множеством ребер*** бинарного дерева d. Легко видеть, что если $|R|$ – мощность множества дуг и $|E|$ – мощность множества ребер дерева d, то $|R| = 2|E|$. Не сложно доказать, что $|d| = |E|$ и $|V| = |d| + 1$, где $|V|$ –мощность множества V вершин дерева d.

Полученная выше алгебраическая конструкция бинарного дерева d однозначно определяет граф $G = \langle V, E \rangle$, удовлетворяющий классическому [4] определению бинарного дерева.

Дальнейшее развитие алгебраического метода представления структуры бинарных деревьев представляется автору следующим:

1) построение системы аксиом, алгебраически описывающей множество бинарных деревьев;

2) развитие аксиоматической алгебраической теории бинарных деревьев и ее сравнительный анализ с существующей теорией.

В том случае, если удастся создать алгебраическую теорию бинарных деревьев, сила которой не уступает существующей теории (т. е. если все теоремы могут быть доказаны в алгебраической интерпретации), то имеет смысл:

1) построение формальной грамматики, описывающей алгебраический язык представления бинарных деревьев;

2) разработка и анализ эффективности алгоритмов, использующих алгебраическое представление бинарных деревьев.

Выполнение предложенного плана, по мнению автора, создает теоретическую основу для построения специализированного языка программирования (или некоторой его части), позволяющего формулировать и эффективно решать некоторые задачи теории графов.

Литература

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 1. Основные алгоритмы. – М.: Издательский дом Вильямс, 2004. – 720 с.

2. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. – М.: Издательский дом Вильямс, 2004. – 832 с.

3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверст Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2004. – 960 с.

4. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.

5. Флорес И. Структуры и управление данными. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 319 с.