УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, доцент

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

In work for the decision of nonlinear boundary problems the method of plural bilaterial shooting is offered. The closing system of the equations received in a method and independence of its order of a choice of points and subintervals of shooting is in more details studied.

В настоящее время до сих пор актуальным остается вопрос о построении и исследовании вычислительных алгоритмов для решения граничных задач с пограничным слоем. Эти задачи очень сложны в вычислительном отношении, кроме того, они требуют более детальной информации о поведении решения. Для решения подобных задач выгодно применять модификации методов пристрелки [1].

Рассмотрим систему нелинейных о. д. у. первого порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

где

$$y : [a,b] \to R^n, f : [a,b] \times R^n \to R^n.$$

Предположим, что зависимость f от параметра ε такова, что в соответствующих граничных задачах могут возникать пограничные либо внутренние переходные слои. Это в ряде случаев можно обнаружить путем использования информации о решении исходной задачи и некоторых его свойств [2]. Роль малого параметра ε естественным образом транслируется через решение граничной задачи.

Присоединим к уравнению (1) двухточечное граничное условие наиболее общего вида:

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $g : R^n \times R^n \to R$.

Будем предполагать, что отображение f, g и отрезок $[a, b]$ таковы, что задача (1, 2) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

В методах пристрелки практически отсутствуют какие-либо специальные ограничения на правую часть f, вид граничных условий g и области интегрирования $[a, b]$.

Имеют место самые сложные случаи, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, осцилляциями, резкими перепадами, в частности, наблюдаются и разрывы первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе эксперимента.

Для этих целей предлагается метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью. В нем существует возможность выбора точек пристрелки, точек сшива решений, выбора параметров пристрелки и выбора длин положительных и отрицательных подынтервалов пристрелки.

Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем.

1. Выбираем точки пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m-1} < t_{2m} = b.$$

Множественную пристрелку организовываем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

2. Строим пристрелочные задачи Коши в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t,u),\ t \in J^{(+)}_{2j-1} = \{t_{2j-1} \le t \le t_{2j}\}, \\ u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J^{(-)}_{2j-1} = \{t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ y_{2j-1} \in R^n,\ j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{4}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

3. Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

4. Перепишем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z) = 0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &H : R^N \to R^N, \quad N = mn, \\ &z = (y_1^T, y_2^T, \ldots, y_{2m-1}^T)^T. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения

$$y^*_{2j-1} = y(t_{2j-1}),\ z^* = (y_1^{*T},...,y_{2m-1}^{*T})^T. \qquad (8)$$

Тогда будет выполняться замыкающая система вида

$$H(z^*) = 0,$$

где z^* – искомое решение замыкающей системы уравнений (5).

5. Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи можно представить формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t), y^*_{2j-1}), & t \in J^{(-)}_{2j-1}, \\ u(t; y^*_{2j-1}), & t \in J^{(+)}_{2j-1},\ j = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (9)$$

Выпишем матрицу Якоби $\partial H(z)/\partial z$ для замыкающей системы (6) в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)} & -V_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_3^{(4)} & -V_5^{(4)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{2m-3}^{(2m-2)} & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{2m-1} \end{bmatrix}$$

В первых $(m-1)$ блочных строках матрица Якоби будет двухдиагональной. В последней строке ненулевыми являются только матрицы-блоки, расположенные на первом и последнем местах.

Выпишем матрицы-блоки прямого и обратного направлений:

$$U_{2j-1}^{(2j)} = \frac{\partial u(t_{2j}, y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1,m},$$

$$V_{2j+1}^{(2j)} = \frac{\partial v(t_{2j}, y_{2j+1})}{\partial y_{2j+1}}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$G_1 = \frac{\partial g(M)}{\partial v} V_1^{(0)}, \quad G_{2m-1} = \frac{\partial g(M)}{\partial u} U_{2m-1}^{(2m)},$$

$$M = (v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2v-1})).$$

Рассматривая матрицу Якоби, более подробно опишем ее блоки.

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(u) U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, \quad t \in J^{(+)}_{2j-1}; \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(u) = \dfrac{\partial f(t, u(t, y_{2j-1}))}{\partial u}, \\ U_{2j-1}(t) = \dfrac{\partial u(t, y_{2j-1})}{\partial u}. \end{cases} \qquad (11)$$

Аналогичным образом получим матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(v) V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1}) = I,\ t \in J^{(-)}_{2j-1}, \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$\Phi_{2j-1}(v) = \frac{\partial f(t, v(t, y_{2j-1}))}{\partial v},$$
$$V_{2j-1}(t) = \frac{\partial v(t, y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (13)$$

причем

$$U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}(t_{2j}),$$
$$V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}(t_{2j-2}). \qquad (14)$$

Будем считать, что для решения замыкающей системы уравнений используется модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби. Кратко изложим его алгоритм:

1. $$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -H(z^{(k)}). \qquad (15)$$

2. Построим последовательные приближения

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2... . \qquad (16)$$

3. Находим поправки $\Delta z^{(k)}$ в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)} = (\Delta z_1^{(k)T}, \Delta z_3^{(k)T}, ..., \Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T, \qquad (17)$$

где

$$H = (h_1^{(k)}, h_3^{(k)}, ..., h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)} = h_i(z^{(k)}).$$

Из формулы (15) методом последовательного исключения получим

$$\Delta z_{2m-1}^{(k)} = \pi_1 \Delta z_1^{(k)} + \sum_{j=1}^{m-1} \pi_{j+1} (V_{2j+1}^{(2j)})^{-1} h_j^{(k)},$$
$$\pi_k = \Omega_{2m-3} \Omega_{2m-5} \ldots \Omega_{2k+1},$$
$$k = \overline{1, m-1},$$
$$\pi_m = I, \quad \Omega_{2j-1} = (V_{2j+1}^{(2j)})^{-1} U_{2j-1}^{(2j)}.$$

Следовательно, выполняется

$$G_1\Delta z_1^{(k)} + G_{2m-1}(\pi_1\Delta z_1^{(k)} + \sum_{j=1}^{m-1}\pi_{j+1}(V_{2j+1}^{(2j)})^{-1} h_j^{(k)}) = -h_m^{(k)}.$$

Причем обязательно должно выполняться условие

$$\det(G_1 + G_{2m-1}\pi_1) \neq 0. \qquad (18)$$

Учитывая последнее условие, найдем поправку $\Delta z_1^{(k)}$:

$$\Delta z_1^{(k)} = (G_1 + G_{2m-1}\pi_1)^{-1}(h_m^{(k)} + G_{2m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\pi_{j+1}(V_{2j+1}^{(2j)})^{-1} h_j^{(k)}).$$

Воспользовавшись найденной поправкой $\Delta z_1^{(k)}$ и учитывая систему вида (15), можно вычислить остальные поправки $\Delta z_3^{(k)}, \Delta z_5^{(k)}, \ldots, \Delta z_{2m-1}^{(k)}$.

Вычислив по предложенному алгоритму все поправки, можно сделать вывод, что если выполняется условие (18), то система линейных алгебраических уравнений вида (15) будет однозначно разрешима. Свойства матрицы $G_1 + G_{2m-1}\pi_1$, используемой при нахождении поправок, можно регулировать.

Процедуру численного решения задач Коши, предназначенных для определения блоков

$$U_{2j-1}^{(2j)} \text{ и } V_{2j-1}^{(2j)},$$

можно видоизменять таким образом, чтобы свойства, характеризующие метод Ньютона, сохранялись. При этом можно добиться экономии вычислений.

При исследовании сходимости предлагаемого метода множественной двусторонней пристрелки на первое место выдвигается свойство изолированности решения изучаемой граничной задачи. Большое внимание уделяется также замыкающей системе уравнений вида (5). Порядок этой системы определяется числом точек пристрелки. В рассмотренном варианте замыкающая система имеет m точек пристрелки, а порядок системы равен n. В этом случае, если число точек пристрелки уже выбрано, то в дальнейших вычислениях порядок этой системы будет оставаться постоянным. Порядок также не будет зависеть от сетки, выбранной на подынтервалах пристрелки, при численном решении пристрелочных задач Коши.

Система уравнений вида (5) не будет изменяться также в случае неравномерности выбранной сетки. На систему не окажет особого влияния и перемена методов решения задач Коши. А для решения задач Коши в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо разработанных методик [1].

Литература

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. – М., 1983. – 200 с.

2. Кулешова И. Ф., Монастырный П. И. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем //ДАН БССР, 1989. – Т. 33, № 2. – С. 106–109.

3. Кулешова И. Ф. Получение границ спектра матриц Якоби в методе множественной двусторонней пристрелки // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. – Мн., 1994. – Вып. II. – С. 44.