

ТЕНЗОРЫ ВЕЙЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

The paper is devoted to the study of action $GL(3, C)$ on 15-dimensional space of Weyl's tensor and complete classification of orbits dimension less than 8.

Проведем систематический анализ тензоров Вейля линейных связностей на 3-мерном многообразии. Пусть M – дифференцируемое многообразие размерности 3. Операцию ковариантного дифференцирования на M обозначим ∇ . Тензор кручения T определяется так:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

при этом в каждой точке получаем кососимметрическое билинейное отображение.

Тензор кривизны R имеет вид

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Мы будем также говорить, что ∇ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$.

Далее будем предполагать, что связности имеют нулевое кручение. Если $R = 0$, то будем говорить, что связность ∇ является плоской. Если $\nabla R = 0$, то связность ∇ называется (локально) симметрической аффинной связностью.

Определим тензор Риччи Ric :

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{tr}\{X \mapsto R(X, Y)Z\}.$$

Тензор Вейля W (или проективный тензор кривизны Вейля) определяется по формуле

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} (\text{Ric}(Y, Z)X - \text{Ric}(X, Z)Y).$$

Пусть (M, G) – однородное пространство, G_0 – стабилизатор произвольной точки O . Пусть g – алгебра Ли группы Ли G , а g_0 – подалгебра, соответствующая подгруппе G_0 . Тогда многообразие может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов G/G_0 , а касательное пространство $T_0 M$ – с факторпространством g/g_0 (см., например, [7]). Тогда (g, g_0) – соответствующая пара алгебр Ли. Аффинной связностью на паре (g, g_0) называется такое отображение

$$\Lambda : g \rightarrow gl(V),$$

где

$$V = g/g_0,$$

что его ограничение на g_0 есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g_0 -инвариантным. Хорошо известно (см., например, [6]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимно-однозначном соответствии с аффинными связностями на паре (g, g_0) .

Поскольку определенные выше тензоры инвариантны относительно действия группы Ли G_0 , то они однозначно определяются тензо-

рами на касательном пространстве к многообразию, причем все эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Множество всех тензоров Вейля на 3-мерном многообразии образует неприводимое представление относительно естественного действия группы $GL(3, C)$. В отличие от тензора Риччи к исследованию пространства орбит этого действия не применимы классические методы геометрической теории инвариантов.

В работе проводится анализ и дается классификация орбит размерности менее 8 действия $GL(3, C)$ на 15-мерном пространстве тензоров Вейля. Идея описания орбит, которая используется в работе, основана на рассмотрении возможных стабилизаторов, являющихся алгебраическими подгруппами в $GL(3, C)$ ненулевой размерности. Каждая такая подгруппа представима в виде произведения редуктивной (в $GL(3, C)$) подгруппы и нормальной унипотентной подгруппы.

Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – стандартный базис в $V = C^3$ и $\{e^1, e^2, e^3\}$ – дуальный базис в V^* . Рассмотрим пространство $\text{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V))$ и запишем каждый его элемент α в координатах

$$\alpha = \alpha^l_{ijk},$$

где

$$\alpha(e_i \wedge e_j) = \sum_{l \leq k, l \leq 3} \alpha^l_{ijk} e^k \otimes e_l.$$

Определим подпространство W в $\text{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V))$ как множество элементов α , удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha^l_{jik} = -\alpha^l_{ijk};$$

$$\alpha^l_{ijk} + \alpha^l_{jki} + \alpha^l_{kij} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha^l_{ijk} = 0$$

для всех $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Построим изоморфизм

$$\lambda : \Lambda^2 V \rightarrow V^*,$$

$$\lambda(v_1 \wedge v_2)(v_3) = (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)/w,$$

где $w = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$.

Получаем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\Lambda^2 V, gl(V)) &\Leftrightarrow \text{Hom}(V^*, gl(V)) = \\ &= V \otimes gl(V) = V \otimes V^* \otimes V. \end{aligned}$$

При этом элементам подпространства W в $\text{Hom}(\Lambda^2 V, \text{gl}(V))$ (т. е. удовлетворяющим условиям 1–3) соответствуют только элементы

$$S^2 V \otimes V^* = \text{Hom}(S^2 V^*, V^*) \subset V \otimes V^* \otimes V.$$

Зафиксируем базис пространства

$$W \subset S^2 V \otimes V^*$$

(размерность этого пространства равна 15).

$$\begin{aligned} f_1: e_{(11)}^1 - 2e_{(13)}^3; & f_2: e_{(11)}^2; \\ f_3: e_{(11)}^3; & f_4: 2e_{(12)}^1 - 2e_{(23)}^3; \\ f_5: 2e_{(12)}^2 - 2e_{(13)}^3; & f_6: 2e_{(12)}^3; \\ f_7: 2e_{(13)}^1 - e_{(33)}^3; & f_8: 2e_{(13)}^2; \\ f_9: e_{(22)}^1; & f_{10}: e_{(22)}^2 - 2e_{(23)}^3; \\ f_{11}: e_{(22)}^3; & f_{12}: 2e_{(23)}^1; \\ f_{13}: 2e_{(23)}^2 - e_{(33)}^3; & f_{14}: e_{(33)}^1; \\ f_{15}: e_{(33)}^2. \end{aligned}$$

Здесь через $e_{(ij)}^k$ обозначена операция симметрирования:

$$e_{(ij)}^k = \frac{1}{2!} (e_{ij}^k + e_{ji}^k).$$

Далее отображение $\text{gl}(3, C) \rightarrow \text{gl}(15, C)$ будем обозначать r .

Каждая подалгебра алгебры Ли $\text{gl}(3, C)$, состоящая из нильпотентных элементов, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Предполагается, что переменные обозначаются латинскими буквами и принадлежат C .

Классифицируем тензоры Вейля со стабилизатором, нильрадикал a которого совпадает с одной из перечисленных выше подалгебр. Найдем действие $r(a)$ на пространстве W (в базисе $f_1 - f_{15}$), а также подпространство всех тензоров, инвариантное относительно этого действия

$$\text{Inv}(a) = \{ \alpha \in W \mid r(a) \cdot \alpha = \{0\} \}.$$

В дальнейшем, если это не будет вызывать разночтений, будем отождествлять подалгебру a с ее образом $r(a)$.

В найденном инвариантном подпространстве берем открытое подмножество

$$\text{Inv}^0(a) = \{ v \in \text{Inv}(a) \mid \text{Nil}(\text{GL}(3, C)_v) = a \}$$

и рассматриваем только те алгебры, у которых $\text{Inv}^0(a) \neq \emptyset$.

Найден список подпространств пространства W и соответствующих стабилизаторов

$$\langle f_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & z & t \\ 0 & y & u \\ 0 & 0 & -(x+3y)/4 \end{pmatrix}$$

$$\langle f_6 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & t \\ 0 & 0 & -(x+y)/2 \end{pmatrix}$$

$$\langle f_7 + f_{13} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & t & 0 \\ z & y & 0 \\ 0 & 0 & -3(x+y)/2 \end{pmatrix}$$

$$\langle 2f_2 + f_6 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 5x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & -3x \end{pmatrix}$$

$$\langle -2/3f_1 + f_5 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y-2x/3 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1/2f_1 + 1/4f_3 + f_{11} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 9x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & -7x \end{pmatrix}$$

$$\langle f_6 - 1/2f_4 + f_{10} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -3x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\langle -2/3f_1 + f_5 + f_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -5x/3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\langle f_2 + f_{11} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 5x/13 & 0 \\ 0 & 0 & -11x/13 \end{pmatrix}$$

$$\langle -2/3f_1 + f_5 + f_{11} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x/9 & 0 \\ 0 & 0 & -7x/9 \end{pmatrix}$$

$$\langle f_3 - 1/2f_4 + f_{10} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 9x & 0 \\ 0 & 0 & -7x \end{pmatrix}$$

$$\langle 2(1-a)f_1 + (1+a)f_5 \rangle,$$

$$a \neq 2, a \neq 0,$$

$$(1-a, 1+a) \Leftrightarrow (a-1, 3-a)$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y-2x/3 \end{pmatrix}$$

$$\langle f_2 - f_4 + 2f_{10} \rangle$$

x	0	y
0	x	0
0	0	-5x/3

$$\langle 1/2f_1 + 1/4f_5 + f_{11} + 2f_2 + f_6 \rangle$$

0	x	0
0	0	x
0	0	0

$$\langle f_3 + f_{11} + f_5 - 2/3f_1 \rangle$$

0	0	x
0	0	0
0	0	0

$$\langle f_3 + f_6 + f_{10} - 1/2f_4 \rangle$$

0	0	x
0	0	0
0	0	0

$$\langle f_6 + af_3 + f_{10} - 1/2f_4 + f_2 \rangle$$

0	0	x
0	0	0
0	0	0

$$\langle -1/2f_4 + f_{10} + f_2 + f_3 \rangle$$

0	0	x
0	0	0
0	0	0

$$\langle af_{13} + f_7 + f_6 \rangle, \quad a \Leftrightarrow 1/a$$

-x	0	0
0	x	0
0	0	0

$$\langle f_6 + f_{14} \rangle$$

5x	0	0
0	-7x	0
0	0	x

$$\langle f_3 + af_4 + (1-2a)f_{10} \rangle, \quad a \neq 1/4, a \neq 3/4$$

x	0	0
0	-7x	0
0	0	9x

$$\langle f_9 + f_5 + 2f_1 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

$$\langle f_{10} + f_5 - f_4 + 2f_1 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

$$\langle f_9 + f_2 + f_4 + 2f_{10} + 2af_1 + af_5 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

$$\langle f_9 + f_2 + 2f_1 + f_5 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

$$\langle f_9 + f_2 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

$$\langle 3f_{10} + f_5 + 2f_1 \rangle$$

x	0	0
0	-5/3x	0
0	0	x

Здесь переменные обозначаются буквами x, y, z, t, u и принадлежат $\mathbb{C}$.

Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию локально однородных аффинных связностей без кручения в трехмерном пространстве. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Литература

1. B. Komrakov, A. Tchourioumov, N. Mozheii, et al. Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces – Preprint / Univ. Oslo, Oslo., 1993, N. 35.
2. X. Крафт. Геометрические методы в теории инвариантов. – Мир, 1987.
3. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. – Москва: Наука, 1988.
4. Ш. Кобаяши. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. – Москва: Наука, 1986.
5. B. Opozda. Affine versions of Singer's theorem on locally homogeneous spaces, Ann. Global Anal. Geom., 15 (1997), 187–199.
6. Nomizu K., Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65.
7. А. Л. Онищик. Топология транзитивных групп Ли преобразований. – М.: Физ.-мат. лит., 1995.
8. Винберг Э. Б. Инвариантные линейные связности в однородном пространстве // Труды Моск. мат. общества. – 1960. – Т. 9. – С. 191–210.