

О ПОСТРОЕНИИ НОМОГРАММ

In this paper we consider construction of nomograms from adjusted points for nonlinear multiple regression equation.

В настоящей статье рассмотрено построение математической модели по данным, полученным в результате химических опытов, и затем по полученной математической модели рассчитаны параметры номограммы из выравненных точек и выполнено ее построение [1].

Номография – это раздел математики, в котором изучаются способы графического представления функциональных зависимостей со многими переменными (формул, уравнений, систем уравнений) на специальных чертежах – номограммах. Название «номография» было дано этому разделу математики в 1890 г. Международным математическим конгрессом в Париже. Основателем номографии считается французский инженер-математик академик Морис Окань [5].

Номограммы – это геометрические модели функциональных зависимостей. Их можно использовать как доступное и удобное вычислительное средство и как весьма наглядное и эффективное средство исследования функциональных зависимостей.

Номограммы – полезное дополнение к ЭВМ. Если данная задача допускает номографическое решение, точность которого достаточна, то оно часто оказывается более эффективным, чем машинное решение той же задачи, состоящее в разработке программы или расчете таблицы с несколькими входами. В том же случае, когда для данной задачи точность номограмм мала, их можно применять для приблизительных расчетов, определения нулевых приближений, контроля вычислений с целью обнаружения грубых ошибок. Выгодно совместное использование номограмм и ЭВМ при решении многопараметрических задач, когда результаты расчета представляются номограммами.

Номограммы находят применение в самых разных областях знания. Они используются, например, в расчете траекторий космического полета, в строительном деле, машиностроении, электротехнике, радиотехнике, мелиорации, водоснабжении, гидравлике, техническом нормировании, горном деле, геодезии, картографии, биологии, сельском хозяйстве, климатологии, теплотехнике, экономике, статистике, медицине, химии и т. д.

В настоящее время многие важные практические задачи могут быть наиболее эффективно решены именно номографическими методами. Каждая номограмма строится для определенной функциональной зависимости в заданных пределах изменения переменных. Значения переменных изображаются на номограммах помеченными точками и помеченными линиями. Множество помеченных точек, зависящее от одной переменной, называется шкалой, множество помеченных точек, зависящее от двух переменных, – бинарным полем. Бинарное поле оформляется в виде сетки, состоящей из двух семейств помеченных линий. Точка в бинарном поле определяется как точка пересечения линий с заданными пометками. Широко известным примером бинарного поля является сетка из параллелей и меридианов на географической карте. Шкалы, семейства помеченных линий и бинарные поля в номограммах оформляются так, чтобы было удобно находить точки и линии с заданными пометками и определять пометки ответных точек и линий. На номограммах вычислительная работа заменяется выполнением простейших геометрических операций, указанных в ключе пользования, и считыванием одного или нескольких ответов.

Расчет требуемых зависимостей по любой номограмме заключается в следующем [1, 4]. На шкалах, в бинарных полях или в семействах линий находят точки или линии, отвечающие заданным значениям переменных. Затем согласно схеме пользования выполняют какие-либо простые геометрические операции (наложение линейки, отметка циркулем, построение отрезка, равного данному, и т. п.). В результате находят одну или несколько ответных точек на шкалах, в семействах линий или в бинарных полях и читают их пометки.

Построение номограммы для какой-либо формулы особенно выгодно, когда по ней нужно проводить массовые вычисления. Точность получения ответов по номограммам в среднем имеет тот же порядок, что и точность получения ответов на логарифмической линейке.

Номограммы, являясь удобным и дешевым счетным прибором, оказываются еще и нагляд-

ной геометрической моделью данной зависимости: ее свойства находят свое отражение в геометрических особенностях номограмм. Поэтому номограммы можно использовать для исследования этих свойств. Часто такое исследование выполняется на номограммах значительно проще и нагляднее, чем иными способами. На номограммах можно проследить влияние отдельных переменных на результат, выявить и исследовать экстремальные особенности, если они имеются, увидеть область существования решения, обнаружить ранее неизвестные особенности функциональной зависимости. Номографические методы исследования функциональных зависимостей выгодно применять в задачах подбора параметров эмпирических формул по результатам наблюдений и в задачах аппроксимации одной функции другой.

Разработка номограмм может явиться научным результатом в той отрасли знания, для которой они построены. Один из путей получения таких результатов состоит в уменьшении упрощающих допущений и в представлении номограммами уточненных зависимостей. Другой путь – номографирование зависимостей, которые из-за своей сложности не могут найти практического применения. Номографирование делает возможным применение таких результатов на практике. Это касается и зависимостей, заданных громоздкими таблицами с несколькими входами.

Рассмотрим задачу.

При проведении химического опыта были получены следующие данные (таблица): выход продукта Y в результате химической реакции в зависимости от избытка кислоты K и температуры t .

Требуется построить номограмму, позволяющую оперативно находить условия, которые обеспечивают получение определенного количества продукта Y в зависимости от избытка кислоты K и температуры t .

Предварительный анализ данной зависимости показал, что ее можно выразить следующим образом:

$$Y = b_0 + b_1 t + b_2 K + b_3 t^2 + b_4 K^2,$$

т. е. в виде уравнения нелинейной множественной регрессии.

Используя программное обеспечение Excel [3], найдем коэффициенты данной зависимости и проверим достоверность построенной модели [2]:

$$Y = 87,267 + 0,2758t + 0,6112K - 0,0038t^2 - 0,0277K^2. \quad (1)$$

Таблица

Y	t	K
91	20	0
92,3	20	2
93,7	20	4
94,2	20	6
94,6	20	8
94,7	20	10
94,75	20	12
94,3	20	14
91,8	40	0
93,4	40	2
94,2	40	4
95,1	40	6
95,2	40	8
95,3	40	10
95,4	40	12
95	40	14
89,8	60	0
91,3	60	2
92,4	60	4
93,8	60	6
94	60	8
94,2	60	10
94,5	60	12
94	60	14
89,2	70	0
89,8	70	2
90,1	70	4
90,2	70	6
90,4	70	8
90,4	70	10

Полученная модель хорошо описывает экспериментальные данные. Коэффициент детерминации равен 0,94 и, следовательно, факторы, включенные в модель, на 94% объясняют изменчивость зависимой переменной. Средняя ошибка аппроксимации равна 0,0004, что свидетельствует об адекватности рассматриваемой модели.

По полученному уравнению (1) построим номограмму из выравненных точек с тремя параллельными шкалами [1, 4]. Обозначим

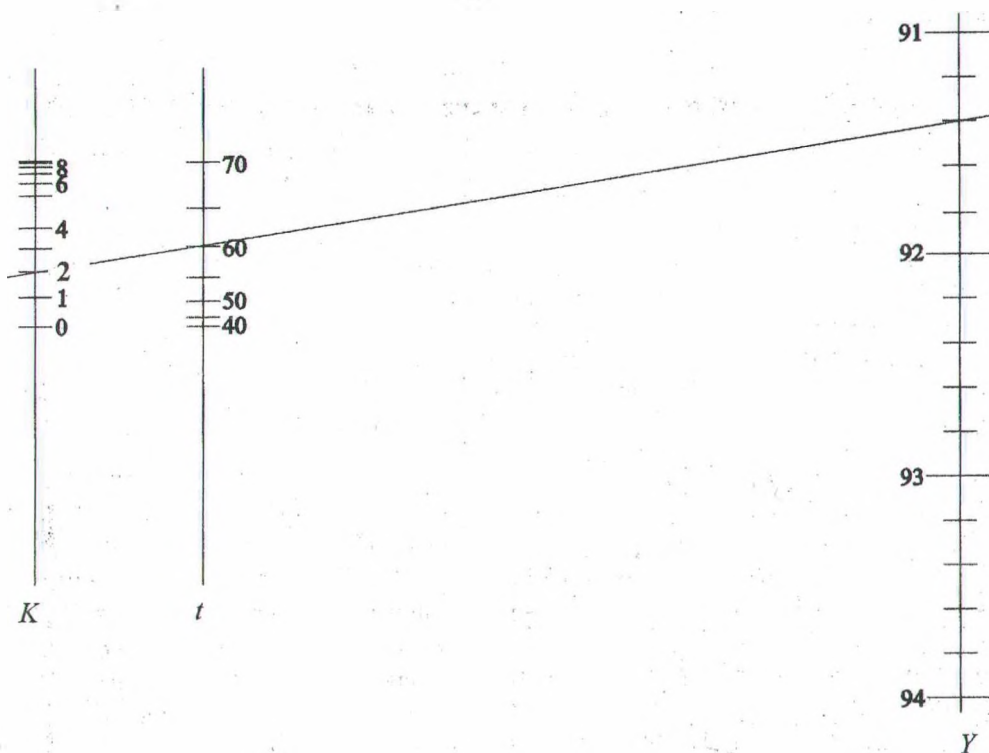
$$f_1 = 0,6112K - 0,0277K^2;$$

$$f_2 = 0,2758t - 0,0038t^2;$$

$$f_3 = Y - 87,267.$$

Тогда зависимость (1) примет вид

$$f_3 = f_1 + f_2. \quad (2)$$



Рисунок

Уравнения шкал номограммы для формы (2) запишутся следующим образом.

Шкала K :

$$\xi = 0, \eta = m(f_1 - a).$$

Шкала t :

$$\xi = H, \eta = n(f_2 - b).$$

Шкала Y :

$$\xi = \frac{mH}{m+n}, \eta = \frac{mn(f_3 - a - b)}{m+n},$$

где m, a, H, n, b – параметры номограммы.

Примем расстояние между шкалами K и t $H = 50$ мм. Тогда $a = 0, b = 5,0374, m = 14,9199, n = -12,2153$.

Следовательно, уравнения элементов номограммы имеют вид

Шкала K :

$$\xi = 0, \eta = 14,9199(0,6112K - 0,02766K^2).$$

Шкала t :

$$\xi = 50,$$

$$\eta = -12,2153(0,2759t - 0,0038t - 5,0374).$$

Шкала Y :

$$\xi = 275, \eta = -67,3856(Y - 87,267 - 5,0374).$$

Номограмма, построенная по этим уравнениям, приведена на рисунке. На ней пунктирной линией показано решение конкретной задачи. Дано: $K = 2, t = 60$. Ответ $Y = 91,4$.

Литература

1. Глаголев Н. А. Курс номографии. – М.: Высшая школа, 1961.
2. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. И. Математические методы в экономике. – М.: МГУ. – 1998.
3. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб.: ВHV – Санкт-Петербург, 1997.
4. Хованский Г. С. Номография и ее возможности. – М., 1977.
5. Хованский Г. С. Номография сегодня. – М., 1987.