УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ГДР СИСТЕМ [1]

The paper deals with functional-differential dynamic systems with delay. A special attention is paid to the hybrid difference-differential dynamic systems, i.e. to the linear stationary differential-algebraic systems with delays (DAD systems), with some variables being continuous the other - piecewise continuous. In the paper, some open mathematical problems in the DAD system as well as results obtained in such a field are discussed. It should be noted that some kinds of neutral type time-delay and discrete-continuous hybrid systems can be regarded as examples of DAD systems.

Введение. Автоматика и телемеханика, теория передачи информации, радиология и химическая кинетика, оптика и радиоастрономия, моделирование технологических процессов в ядерных реакторах, плазме и лазерах, задачи демографии и экономики и т. д. предъявляют всё более возрастающие требования к математическим моделям реальных систем автоматического регулирования. Это, а также прогресс средств вычислительной техники, широкое распространение микропроцессоров в производстве диктуют необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления, ставят новые задачи для более широкого класса динамических систем; появляется потребность в разработке новых более эффективных методов изучения таких систем, в частности, систем с запаздыванием, а также динамических систем с алгебраическими связями, описывающих процессы, в которых как эффектом запаздывания, так и алгебраическими связями пренебречь нельзя.

При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы относятся к классу гибридных [1–8, 10]. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен [1–8, 10, 11–17].

Гибридность означает, вообще говоря, неоднородность в природе рассматриваемого процесса или методах его изучения. Термин «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащие в основной динамике непрерывные и дискретные переменные (сигналы), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что, в конечном счете, и определяет характер (природу) гибридных систем.

Имеется множество примеров гибридных систем. В области управления известен образец такой системы: линейный непрерывный независимый от времени объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями (математическая модель основывается на записывающем устройстве непрерывного действия), управляется дискретным линейным независимым от времени регулятором, заданным уравнениями в конечных разностях (используется записывающее устройство дискретного действия). Эти типы систем обычно изучаются на слоях под названием систем дискретных данных или систем цифрового управления.

Другой стандартный пример гибридной системы управления – система коммутации, где поведение может быть описано конечным числом динамических моделей (системы дифференциальных или разностных уравнений) вместе со сводом правил для переключения среди этих моделей.

Еще одна область теории гибридных систем – изучение качественных свойств (например, устойчивость) динамических систем, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с разрывными коэффициентами, систем с переменной структурой динамики.

Имеется много причин для использования гибридных моделей – это, прежде всего, адекватность данных моделей, обоснованное их упрощение, использование цифровых машин (уп-

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

равление с помощью компьютерных программ); гибридные системы возникают при моделировании иерархической структуры реальных систем управления, в частности, при описании динамических, дискретных, стохастических подсистем, комплексных систем и т. д.

Несмотря на бурное развитие теории гибридных систем, предмет изучения этой теории однозначно не обозначен (см. работы [1–8, 10, 11–17] и ссылки к ним). Поэтому в качестве первоочередной задачи этой теории представляется

Задача 1. Построение математической модели общей гибридной системы.

1. Некоторые математические модели гибридных систем. Рассмотрим дескрипторную функционально-дифференциальную систему с последействием нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-\int_{-h}^{0}d_sG(t,s)x(t+s)\right)=\int_{-h}^{0}d_sA(t,s)x(t+ \tag{1}$$

$$+s)+\int_{-h}^{0}d_sB(t,s)u(t+s),t\geq t_0.$$

Здесь $G(t, s)$, $A(t, s)$, $B(t, s)$ – матрицы-функции с ограниченным изменением по второму аргументу на промежутке $[-h, 0]$, где h – некоторое положительное число; $u(\cdot)$ – управляющее внешнее воздействие.

Вводя вспомогательную вектор-функцию $y(\cdot)$, систему (1) запишем в «гибридном» виде:

$$\dot{y}(t)=\int_{-h}^{0}d_sA(t,s)x(t+s)+\int_{-h}^{0}d_sB(t,s)u(t+s), \tag{2}$$

$$x(t)=y(t)+\int_{-h}^{0}d_sG(t,s)x(t+s),t\geq t_0.$$

Если меры Стилтьеса в (2) являются дискретными, сосредоточенными в точках $-h_j$, $j = 0,1,\ldots,l$; $0 = h_0 < h_1<\ldots< h_l = h$ и мера $d_sG(t, s)$ исчезает в нуле, получаем гибридную дифференциально-разностную (ГДР) систему.

Под общей ГДР системой с сосредоточенными запаздываниями будем понимать следующую:

$$x(t)=\sum_{j=0}^{l}\left(A_{11j}(t)x(t-h_j)+A_{12j}(t)\times \right. \tag{3}$$

$$\left.\times y(t-h_j)+B_{1j}(t)u(t-h_j)\right),$$

$$y(t)=\sum_{j=0}^{l}\left(A_{21j}(t)x(t-h_j)+A_{22j}(t)\times \right. \tag{4}$$

$$\left.\times y(t-h_j)+B_{2j}(t)u(t-h_j)\right),t\geq 0$$

с начальными условиями

$$x(t_0+0)=x(t_0)=x_0\in R^n,$$
$$x(\tau)=\varphi(\tau),\ y(\tau)=\psi(\tau), \tag{5}$$
$$u(\tau)=\xi(\tau),\ \tau\in\left[t_0-h_j,t_0\right],$$

т. е. систему, описываемую дифференциальными и разностными уравнениями. Здесь

$$A_{11j}(t)\in R^{n\times n},\ A_{12j}(t)\in R^{n\times m},\ A_{21j}(t)\in R^{m\times n},$$

$$A_{22j}(t)\in R^{m\times m},\ B_{1j}(t)\in R^{n\times r},B_{2j}(t)\in R^{m\times r};$$

$j = 0,1,\ldots,l$; причем $A_{220}(t) = 0$, компоненты векторных функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\xi(t)$, $t\in[t_0-h_l, t_0]$, а также управляющего воздействия $u(\cdot)$ рассматриваются в классе кусочно-непрерывных функций. Соответствующее решение системы (3)–(5) будем обозначать символами

$$x(t) = x(t;\ t_0, x_0, \varphi, \psi, \xi, u),$$

$$y(t) = y(t;\ t_0, x_0, \varphi, \psi, \xi, u),\ t \geq t_0.$$

Отметим, что системы (3), (4) содержат, как частный случай, системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одной стороны, а с другой – сами являются частным случаем дескрипторных систем (1) с запаздывающим аргументом. Если коэффициенты ГДР системы (3), (4) являются постоянными матрицами, то такая система называется стационарной. Простейшая стационарная ГДР система имеет вид

$$x(t)=A_{11}x(t)+A_{12}y(t)+B_1u(t), \tag{6}$$

$$y(t)=A_{21}x(t)+A_{22}y(t-h)+B_2u(t),t\geq 0. \tag{7}$$

В случае, когда мера $d_sG(t, s)$ исчезает в нуле, а вектор-функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, системы с последействием вида (1) изучались в работах (см. работы [18–20] и ссылки к ним). Если же вектор-функцию $x(\cdot)$ считать кусочно-гладкой и непрерывной, вектор-функцию $y(\cdot)$ – кусочно-непрерывной, то приходится рассматривать их гибридные аналоги (2)–(4), теория которых к настоящему моменту частично разработана [3, 4, 6–8, 10, 15] лишь для случая кратных запаздываний.

В этой связи представляют интерес следующие задачи общей теории гибридных систем (2)–(4).

Задача 2. Постановка начальной задачи, обеспечивающей существование решения.

Задача 3. Получение интегральных представлений решений (обобщенная формула Коши) нестационарных систем.

Задача 4. Представления решений стационарных систем путем разложения в степенные ряды с запаздывающим аргументом, которые можно квалифицировать как обобщение представления решений обыкновенных линейных стационарных динамических систем на основе матричных экспонент.

Отметим, что для систем (3), (4) с кратными (соизмеримыми) запаздываниями задачи 2–4 решены в работе [10], где, в частности, предлагается новая постановка начальной задачи Коши, обеспечивающая существование и единственность решения задачи. Для нестационарных систем получено представление решений в виде интегралов на основе решений соответствующих сопряженных систем, что обобщает на их известное для обыкновенных систем представление по формуле вариации постоянных (формула Коши). Для стационарных систем дано представление решений в виде рядов по решениям соответствующих определяющих уравнения системы (1).

2. Элементы качественной теории управления в ГДР системах. К качественной теории управления относятся такие важные проблемы математической теории управления, как управляемость, наблюдаемость, двойственность, стабилизация, модальное управление, реконструкция, реализация переходных отображений, построение канонических представлений ГДР систем и др.

Определение 1. Система (3), (4) называется относительно $H - t_1$-управляемой при $t_1 > t_0$, если для любых векторов $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ и любых допустимых начальных данных $\psi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ существует допустимое управление $u(\cdot)$ такое, что соответствующее решение системы (3)–(5) обладает свойством

$$H\begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Определение 2. Система (3), (4) называется полностью $H - t_1$-управляемой при $t_1 > t_0 + h$, если требование (8) заменить следующим условием:

$$H\begin{bmatrix} x(t_1+t) \\ y(t_1+t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Задача 5. Найти параметрические критерии относительной и полной $H - t_1$-управляемости ГДР системы (3), (4).

Задача 6. Для управляемых ГДР систем (3), (4) изучить двойственные ГДР системы наблюдения и соответствующие задачи наблюдаемости, двойственные задачам относительной и полной $H - t_1$-управляемости.

Отметим, что некоторые результаты по управляемости и наблюдаемости простейших ГДР систем имеются в работах [3, 4, 6–8, 10].

Обобщением сформулированных задач управляемости являются задачи $\mathbb{R}^n - (s,t)$- и (s, t)-управляемости, которые для систем с запаздывающим аргументом сформулированы в работе [21] и которые можно рассматривать как игровые задачи преследования однотипных объектов, когда начала движения преследующего и преследуемого объектов не совпадают.

Задача 7. Исследовать задачи $\mathbb{R}^n - (s,t)$- и (s, t)-управляемости для ГДР систем (3), (4) и двойственные им задачи наблюдаемости.

Классической в теории регулирования и теории динамических систем является проблема их устойчивости (особенно асимптотической). Рассмотрим, например, невозмущенную простейшую ГДР систему (6), (7):

$$u(t) = 0 \text{ при } t \geq 0. \qquad (9)$$

Следуя методу Эйлера в теории обыкновенных дифференциальных уравнений отыскания решений системы (1) в экспоненциальной форме $x(t) = e^{\lambda t}c_1, y(t) = e^{\lambda t}c_2$, получим характеристическое уравнение вида

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & 1 - A_{22}e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = \Delta(\lambda) = 0, \ \lambda \in C \qquad (10)$$

для системы (1), где C – поле комплексных чисел. Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ назовем характеристическими значениями системы (1).

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Условие

$$\operatorname{Re}\lambda < 0 \text{ для } \Delta(\lambda) = 0, \ \lambda \in C, \qquad (11)$$

является необходимым для каждого из следующих типов устойчивости:

1) асимптотической;
2) экспоненциальной;
3) L_2 -устойчивости системы (6), (7), (9).

Задача 8. Исследовать взаимосвязь различных задач устойчивости для ГДР систем, а также найти необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Для обыкновенных динамических систем и систем с запаздывающим аргументом качественная теория управления и наблюдения хорошо развита (см., например, работы [4, 9, 15, 19, 21] и ссылки к ним) и имеет важные практические приложения. В связи с этим из других нерешенных задач этой теории для ГДР систем уместно указать на следующие проблемы.

Задача 9. Модальное управление, стабилизация и реконструкция ГДР систем.

Задача 10. Построение канонических представлений управляемых и наблюдаемых ГДР систем.

Задача 11. Реализация переходных отображений в различных классах (шкалах) ГДР систем.

Исследование задач 9–11 для частного класса ГДР систем – систем с запаздывающим аргументом можно найти в работах [4, 9, 15, 19, 21].

Задача 12. Построение содержательных математических моделей реальных физических и производственно-экономических процессов, описываемых ГДР системами.

Заключение. В работе обсуждается природа гибридных динамических систем, приводятся примеры гибридных дифференциально-разностных систем, формулируются некоторые нерешенные задачи теории ГДР систем, даются ссылки на известные результаты в рассматриваемой области, например, для частного случая ГДР систем – систем с запаздывающим аргументом

Литература

1. März R. Solvability of linear differentia algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics 45(2004) – Basel: Birkhauser Verlag, 2004. – P. 88–95.

2. Кириллова Ф. М., Стрельцов С. В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Управляемые системы: Сб. трудов Института математики Сибирского отд. АН СССР. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 24–33.

3. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: Сб. трудов Института математики Сибирского отд. АН СССР. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1975. – Вып. 14. – С. 4–10.

4. Трофимчук Т. С. Управляемость систем, неразрешенных относительно старшей производной // Управляемые системы. – 1980. – Вып. 20. – С. 75–82.

5. Щеглова А. А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 86–101.

6. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. – Киев. – 2002. – № 6. – С. 17–25.

7. Marchenko V. M., Poddubnaya O.N., Zaczkiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form // IEEE conf. «RoMoCo», Poznan, Poland. – 2005. – P. 137–143.

8. Marchenko V. M., Zaczkiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay // IEEE conf. «MMAR'2005». – Blazejewko, Poland, 2005.

9. Луазо Ж. Ж. , Марченко В. М. Реализация в шкалах систем с запаздыванием // Доклады РАН, 2002. – Т. 383. – № 3. – С. 305–308.

10. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады РАН, 2005. – Т. 404. – № 4. – С. 465–469.

11. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, N 1. – P. 109–122.

12. Vidal R, Chiuso A, Soato S., Sastry S. Observability of linear hybrid systems // In Hybrid systems: Computation and Control. – 2003. – Vol. 2623 of LNCS. – P. 526 – 539.

13. Gertler J. J., Cruz J.B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid Systems. – Prepr. 13th World Congr. IFAC, 1996. – Vol. J. – P. 275–311, 473–476.

14. Domek S., Kaszynski R. (Eds.). Hybrid Systems: Computation and Control. – IEEE conf. «MMAR'2004». Vol. 1: Control Theory, Control Engineering, Modelling and Simulation. – Blazejewko, Poland, 2004.

15. Марченко В. М. Вполне регулярные системы с последействием // Труды Института математики. – 2001. – Т. 7. – С. 97–104.

16. Van der Schaft A, Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. – Berlin: Springer, 2000. – 324 p.

17. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 183–189.

18. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

20. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

21. Marchenko V. M. Some control theory problems for time-delay systems // IEEE conf. «MMAR'2004», Blazejewko, Poland. – 2004. – P. 239–243.