

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
МАГНИТОЖИДКОСТНОГО УПЛОТНЕНИЯ

The results of a numerical modelling of the axisymmetrical free surface in the magnetofluidic sealing device for a rotating shaft in case of the hyperbola-shaped concentrator of magnetic field are presented.

1. В магнитоожидкостных уплотнениях (МЖУ) вращающихся валов (см. Рис. 1) магнитная жидкость (МЖ) удерживается внешним неоднородным магнитным полем, которое создается кольцевым магнитом 1 и фокусируется концентратором 2 магнитного потока 3 в зазоре между концентратором и валом 4. Магнитные силы обеспечивают равновесие некоторого объема МЖ при воздействии внешнего перепада давления и центробежных сил. Существенным и мало изученным фактором является деформация свободной поверхности МЖ при высоких скоростях вращения вала. Обычно форма поверхности считается заданной либо рассчитывается на основе предположения о независимости распределения скорости от формы поверхности [1, 2]. Однако эти предположения существенно ограничивают область применения получаемых результатов. Даже при сравнительно небольших скоростях вблизи вала формируется воронка, которая оказывает влияние на распределение скорости.

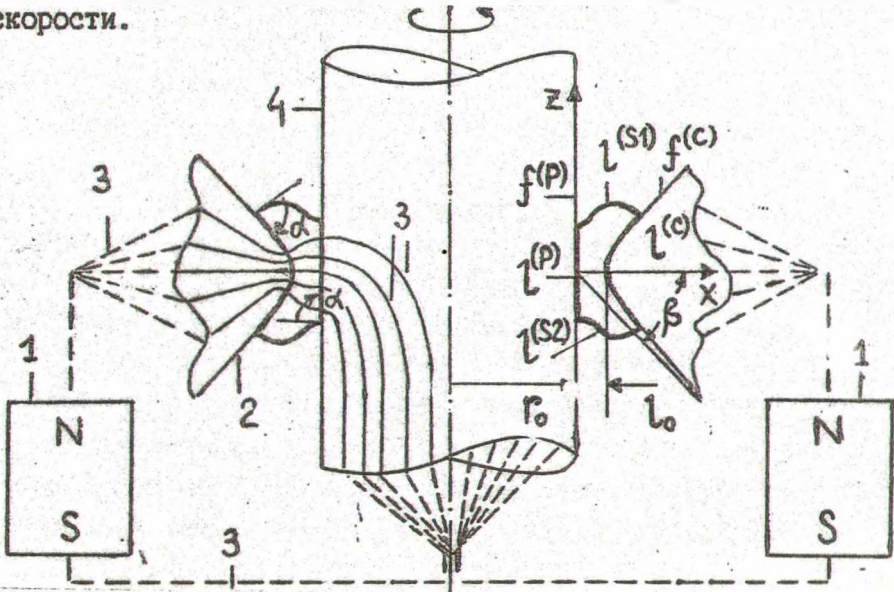


Рис. 1. Геометрия задачи

По мере увеличения скорости воронка проникает в область узкой части магнитного зазора. При этом радиус кривизны мениска, обусловленного смачиванием вала, может уменьшаться настолько, что приводит к заметному вкладу капиллярного давления в общий баланс сил. Характерный размер магнитожидкостной пробки в МЖУ составляет 1 мм, а масштаб капиллярного мениска на два порядка меньше, что делает задачу экспериментального исследования деформации свободной поверхности чрезвычайно сложной. В настоящей работе проведено численное моделирование этого явления. Учитывается действие сил внешнего магнитного поля, центробежных сил, магнитного и капиллярного скачков давления на поверхности.

2. Постановка задачи. В качестве базовой математической модели используем систему уравнений гидродинамики однородной несжимаемой изотропной линейно-вязкой жидкости с постоянными коэффициентами переноса, дополненную силой взаимодействия с магнитным полем в приближении равновесной намагниченности [3].

Используем также предположения геометрического характера. При ламинарном режиме течения и в отсутствие эксцентриситета между концентратором и валом магнитные и гидродинамические поля обладают осевой симметрией. Однако из-за малой относительной ширины магнитного зазора правомерно плоское приближение, в котором уравнения движения записываются в локальной декартовой системе координат, а вращательный характер движения учитывается сохранением центробежной силы. Поместим начало координат на поверхность вала (которую считаем плоской), ось x направим в радиальном направлении, z - в осевом, y - в азимутальном. Тогда для стационарных полей получим

$$\rho \vec{v}_\perp \cdot \nabla v = \eta r^2 v, \quad \nabla \cdot \vec{v}_\perp = 0; \quad (1)$$

$$\rho \vec{v}_\perp \cdot \nabla \vec{v}_\perp = -\nabla p + \eta r^2 \vec{v}_\perp + \mu_0 M \nabla H + \rho / r_0 v^2 \vec{e}_x; \quad (2)$$

$$-\chi^{(n)} \vec{e}_x \cdot \nabla H = \nabla^2 \varphi, \quad (3)$$

где r_0 - радиус вала, v - азимутальная составляющая скорости; $\vec{v}_\perp = v \vec{e}_x + u \vec{e}_z$ - вектор скорости вторичного (вихревого) течения; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты координатных осей и поля соответственно; $\mu = 1 + \chi$, $\chi = M/H$, $\chi^{(n)} = \chi - M_{,H}$ - нелинейная магнитная восприимчивость. Запятая перед переменной в индексе здесь и далее означает дифференцирование.

В плоском приближении "объем" жидкости представляет

собой плоскую фигуру площади Ω , ограниченную замкнутой контуром l , который включает осевые сечения $l^{(f)}$ и $l^{(s)}$ твердых и свободных поверхностей соответственно. В свою очередь, $l^{(f)}$ и $l^{(s)}$ состоят из двух односвязных контуров: $l^{(f)}$ - из сечения плоской поверхности $l^{(p)}$ и сечения концентратора $l^{(c)}$, а $l^{(s)}$ - из сечений двух свободных поверхностей $l^{(s1)}, l^{(s2)}$.

Будем полагать, что вал и концентратор далеки от магнитного насыщения и их магнитная восприимчивость $\mu^{(f)} \gg \mu$, что позволяет задать граничные условия для магнитного потенциала в виде

$$\varphi|_{l^{(p)}} = \varphi_0 = \text{const}, \quad \varphi|_{l^{(c)}} = 0. \quad (4)$$

Здесь $l^{(p)}$ и $l^{(c)}$ - осевые сечения плоской поверхности и концентратора соответственно (они включают $l^{(p)}$ и $l^{(c)}$ как составную часть).

На твердых границах выполняются условия прилипания:

$$v|_{l^{(p)}} = v_0 = \text{const}, \quad v|_{l^{(c)}} = 0, \quad v_{\perp}|_{l^{(f)}} = 0 \quad (5)$$

На свободных поверхностях отсутствует нормальная составляющая скорости, а касательная составляющая H_t напряженности и нормальная составляющая $\mu_0(H_n + M_n)$ индукции поля непрерывны. Полагая, что свободная поверхность МЖ контактирует со слабомагнитной средой, намагниченность которой $M = 0$, получим для $l^{(s)}$

$$v_n = \varphi^{(e)} - \varphi^{(i)} = \varphi_n^{(e)} - \mu\varphi_n^{(i)} = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее индексами i, e отмечены величины на внутренней и внешней сторонах поверхностного слоя МЖ соответственно. Уравнения контуров $l^{(s)}$ и внешней к ним нормали зададим в виде $\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{e}_x + z(s)\vec{e}_z$, $\vec{n} = -z'\vec{e}_x + x'\vec{e}_z$, где s - длина дуги контура, отсчитываемая от начальной точки, расположенной на поверхности вала; штрих означает дифференцирование по s .

Если пренебречь вязкими напряжениями во внешней среде, то касательная и нормальная проекции уравнения равновесия свободной поверхности принимают вид

$$v_{i,n} = 0, \quad v_{t,n} - \alpha v_t = 0; \quad (7)$$

$$p^{(i)n} - p_0 - 2\sigma \kappa_n + \mu_0 M_n^2 / 2 = \alpha \sigma, \quad (8)$$

где $\alpha = -\vec{r}'' \cdot \vec{n} = -z''/x' = x''/z'$ - (9)

кривизна поверхности (положительная, если поверхность жидкости выпукла); $p_0 = \text{const}$ - давление внешней среды; σ - коэффициент поверхностного натяжения.

Проинтегрировав проекцию уравнения (2) на контур l вдоль этого контура, получим распределение давления на границе объема МЖ:

$$p^{(i)} = p_0^{(i)} + \mu_0 \int_{H_0}^H M dH + \frac{\rho}{r_0} \int_1 v^2 dx + \eta \int_1 w_{,n} dl - \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_{10}^2), \quad (10)$$

где $p_0^{(i)}$, v_{10} - давление и вихревая скорость в точке отсчета; $w = \vec{e}_y \cdot \nabla \times \vec{v}_\perp$ - завихренность вторичного течения. Положительное направление на контуре задается касательным ортом $\vec{e}_t = \vec{e}_y \cdot \vec{n}$. Записав уравнение (10) для замкнутого контура l , найдем уравнение для потока завихренности:

$$-\eta \int_1 w_{,n} dl = \rho/r_0 \int_1 v^2 dx. \quad (11)$$

Контуром интегрирования здесь может быть не только граница "объема", но также любая замкнутая линия тока вторичного течения, так как на ней выполняется условие непротекания $v_n = 0$, которое используется при получении (11), а также (10).

Выбрав в качестве точки отсчета начальную точку $s = 0$, из (8), (10) получим уравнение, описывающее распределение давления на свободной поверхности:

$$\sigma z = p_0^{(i)} - p_0 + \mu_0 \left[\int_{H_0}^H M dH + M_n^2/2 \right] + \rho \left[1/r_0 \int_0^s v^2 dx - v_1^2/2 \right] + \eta \left[\int_0^s w_{,n} ds - 2v_{n,n} \right]. \quad (12)$$

Это уравнение дополняется условиями постоянства объема МЖ ($\Omega = \text{const}$) и угла смачивания жидкостью поверхностей вала и концентратора ($\alpha = \text{const}$). Азимутальную скорость и магнитный потенциал представим в виде

$$v = \overset{\circ}{v} + \overset{1}{v}, \quad \tau = \overset{\circ}{\varphi} + \overset{1}{\varphi}, \quad (13)$$

где $\overset{\circ}{v}$ - распределение азимутальной скорости без учета возмущений, вносимых вторичным течением, $\overset{\circ}{\varphi}$ - потенциал внешнего поля. Как следует из (1), (3)-(5), (7), невозмущенные поля являются решениями задач

$$\nabla^2 \overset{\circ}{v} = 0; \quad \overset{\circ}{v} \Big|_{r(p)} = v_0; \quad v \Big|_{r(c)} = 0; \quad \overset{\circ}{v}_{,n} \Big|_{r(s)} = 0; \quad (14)$$

$$\nabla^2 \overset{\circ}{\varphi} = 0; \quad \overset{\circ}{\varphi} \Big|_{r(p)} = \varphi_0; \quad \overset{\circ}{\varphi} \Big|_{r(c)} = 0, \quad (15)$$

а возмущения удовлетворяют неоднородным уравнениям и однородным граничным условиям.

В условиях уплотнений МЖ близка к магнитному насыщению и магнитная восприимчивость χ , определяющая отношение возмущенного поля к внешнему полю, является малым параметром. В линей-

ном приближении магнитные слагаемые в уравнении (12) можно представить в виде

$$\int_{\circ}^{\mathbb{H}} M d\mathbb{H} \approx \int_{\circ}^{\mathbb{H}} M d\mathbb{H} + \overset{\circ}{M} h_e + \frac{1}{2} h (\overset{\circ}{\chi} h - \overset{\circ}{\chi}^{(n)} h_e); \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} M_n^2 \approx \overset{\circ}{M}_n \left[\frac{1}{2} \overset{\circ}{M}_n + \overset{\circ}{\chi} h_n - \overset{\circ}{\chi}^{(n)} h_{e_n} \right],$$

где $\overset{\circ}{\mathbb{H}} = -\nabla\phi$, $\overset{\circ}{M} = M(\overset{\circ}{\mathbb{H}})$, $\overset{\circ}{\chi} = \chi(\overset{\circ}{\mathbb{H}})$, $\overset{\circ}{h} = \overset{\circ}{\mathbb{H}} - \overset{\circ}{\mathbb{H}}$, $\overset{\circ}{e}$ - орт внешнего поля.

Приняв в качестве масштабов: расстояния - минимальную ширину магнитного зазора l_0 , азимутальной скорости - скорость поверхности вала v_0 , давления - комплекс $p_* = \rho v_0^2 l_0 / r_0$, намагниченности - намагниченность насыщения M_s , напряженности поля - максимальное значение поля H_c в зазоре, скорости вторичного течения - его максимальное значение v_w , возмущений поля h - намагниченность насыщения M_s , возмущений скорости v - комплекс $v_* = Re v_w$ (такой выбор определяется уравнением (1)), в линейном по малому параметру χ_1 приближении из (11), (12) получим

$$\alpha B o_m^{-1} = \int_{\circ}^{\mathbb{H}} M d\mathbb{H} + \chi_1 \left[\frac{1}{2} M_n^2 + \overset{\circ}{M} h_e \right] + C + F \left[\int_{\circ}^s v^2 dx + \right. \quad (17)$$

$$\left. + V_1 \left(\int_{\circ}^s w_{,n} ds + 2R^2 v - 2v_{n,n} \right) + v_1^2 R^2 \left(R^2 v^2 - \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right), \right.$$

где $\chi_1 = \frac{M_s}{H_c}$; $F = \frac{\rho v_0^2 l_0}{\mu_0 M_s H_c r_0}$; $R = \frac{\rho v_0^2 l_0^{3/2}}{\eta r_0^{1/2}}$; $V_1 = \frac{W}{W_1}$, $W = \int_{\circ}^s v^2 dx$;
 $W_1 = - \int_{\circ}^s w_{,n} dl$, $B o_m = \mu_0 M_s H_c l_0 / \sigma$ - магнитное число Бонда,

$C = const.$ Основным критерием, определяющим искривление свободной поверхности под действием центробежных сил, является модифицированное магнитное число Фруда (параметр вращения) F .

Расчет формы поверхности с учетом всех факторов, включенных в уравнение (17), представляет собой весьма громоздкую задачу. Оценки показывают, что параметр V_1 мал. Положим, $V_1 = 0$, полностью исключая влияние вторичного течения. Пренебрежем также слагаемым $\chi_1 \overset{\circ}{M} h_e$, содержащим малый параметр χ_1 . Следует отметить, что малые значения χ_1 в общем случае не гарантируют малого влияния возмущений поля на форму поверхности вследствие обусловленного ими специфического механизма поверхностной неустойчивости. Оценки, выполненные в рамках приближения [4], показывают, что в условиях уплотнения эта неустойчивость по-

является сильным градиентным полем. Вместе с тем сохраним слагаемое $\chi M_n^2/2$, которое по порядку величины сравнимо с отбрасываемым, но не вносит в расчет особыа трудностей. Капиллярное давление (17), в котором кроме малого параметра Bo_m^{-1} , содержатся производные высшего порядка, следует сохранить для описания мениска вблизи твердых поверхностей.

Рассмотрим магнитный зазор, образованный плоской поверхностью и гиперболическим концентратором магнитного потока. Уравнение контура $\Gamma^{(c)}$ в этом случае имеет вид

$$\frac{\hat{x}^2}{\cos^2 \beta} - \frac{\hat{z}^2}{\sin^2 \beta} = \frac{l_0^2}{\cos^2 \beta} = a^2.$$

Здесь l_0 - минимальная ширина зазора, \hat{x}, \hat{z} - размерные координаты, β - предельный угол гиперболы (см. рис. 1). Такая форма концентратора позволяет получить аналитическое выражение для внешнего магнитного поля, отражающее основные особенности распределения поля в магнитном зазоре реальных МЖУ. В этом случае удобно ввести координаты эллиптического цилиндра ζ, τ ($\zeta \geq 1, \tau \leq 1$), связанные с декартовыми координатами соотношениями:

$$\hat{x} = a\zeta, \hat{z} = a[(\zeta^2 - 1)(1 - \tau^2)]^{1/2}; \quad (18)$$

$\zeta = \cosh u = (r^+ + r^-)/2, \tau = \cos \theta = (r^+ - r^-)/2,$
где u, θ - специальные координаты,

$$r^+ = \left[\left(\frac{\hat{x}}{a} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\hat{z}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad r^- = \left[\left(\frac{\hat{x}}{a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\hat{z}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Контур $\Gamma^{(p)}$ и $\Gamma^{(c)}$ совпадают с координатными линиями:

$$\tau = 0 \quad (\theta = \pi/2) \quad \text{и} \quad \tau = \cos \beta \quad (\theta = \beta).$$

Сформулировав задачу (15) в координатах u, v , легко получить ее решение в виде $\varphi = (\theta - \beta)/(\pi/2 - \beta)$. Из него находим распределение внешнего поля

$$H = H_0 \sin \beta / \sqrt{g} (\cos \delta e_x - \sin \delta e_z), \quad (19)$$

где $g = \zeta^2 - \tau^2 = r^+ r^-$

$$\cos \delta = \zeta \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{g}}; \quad H_0 = \frac{\varphi_0 \operatorname{ctg} \beta}{l (\pi/2 - \beta)}. \quad (20)$$

В дальнейшем рассматривается ситуация, когда перепад давлений внешней среды на свободных поверхностях равен нулю и ось x является линией симметрии.

Для задачи (17)-(20) был составлен конечноразностный аналог, определенный в области $z \geq 0$. Основные расчеты проводились на равномерной и неравномерной сетках с числом разбиений: 100 - на свободной поверхности и по 20 на валу и

концентраторе. На свободной поверхности неравномерна. сетка сгущалась вблизи точек контакта жидкости с твердыми поверхностями. Решение проводилось методом последовательных приближений. На каждой итерации сначала с помощью метода граничных постоянных элементов [5] решалась задача (14) и определялась скорость на свободной поверхности, найденной на предыдущей итерации. Положение свободной поверхности затем уточнялось с учетом полученного нового распределения скорости путем решения задачи (17)-(20).

3. Результаты расчета. Приведенные ниже результаты получены при фиксированных характерных значениях $\beta = \pi/4$ $X_1 = 2\pi \cdot 10^{-2}$, $Bo_m = 200$. Проводились контрольные расчеты при $X_1 = 0$, которые показали незначительное влияние этого параметра на характеристики свободной поверхности. Варьировались параметр вращения F , безразмерный "объем" $U = \Omega/l_0^2$ и угол смачивания: (контактный угол) α .

На рис. 2 представлены результаты типичного расчета формы свободной поверхности. Как видно, наиболее чувствительным к изменению F параметром свободной поверхности является координата z_0 точки контакта с валом, равная половине длины смоченного жидкостью участка вала (сокращенно - полудлина смачивания). Положение точки контакта, расположенной на концентраторе, изменяется слабо. На рис. 3,4 представлена эволюция длины смачивания при постепенном наращивании параметра F и фиксированных U и α , а также при наращивании объема U и фиксированных α и F . Параметром относительной деформации свободной поверхности может служить отношение $\varepsilon = z_0/z_{0max}$, где z_{0max} - длина смачивания при $F = 0$. В качестве условной границы, разделяющей область больших и малых деформаций, выберем $\varepsilon = 1/2$. Соединив точки, соответствующие $\varepsilon = 1/2$ для различных U , получим кривую половинного деформирования поверхности (штриховая линия на рис.3). Значение параметра вращения $F_{1/2}$, при котором достигается половинное деформирование, является своеобразным показателем жесткости поверхности, зависящим от "объема" МЖ. Как видим, эта зависимость характеризуется наличием максимума $F_{1/2} \approx 2,2$. Соответствующее ему значение "объема", которое находится в диапазоне $4,5 < U_{opt} < 9$, можно принять в качестве оптимального для МЖ с гиперболическим концентратором магнитного потока.

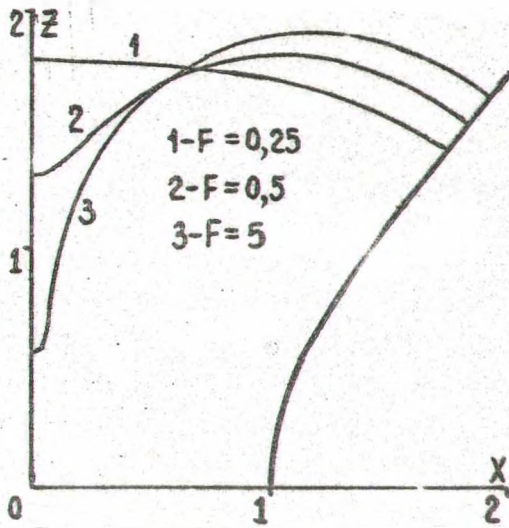


Рис. 2. Формы свободной поверхности при $U=4,53$, $\alpha=\pi/2$

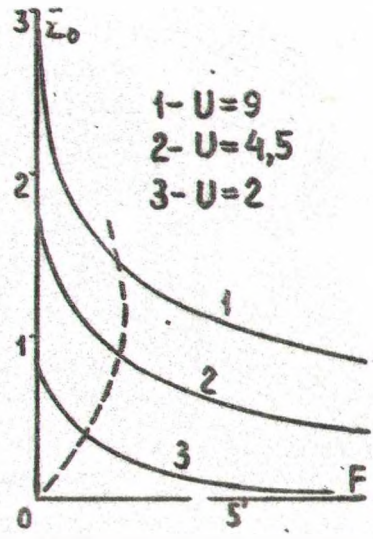


Рис. 3. Полудлина смачивания в зависимости от скорости вращения при $\alpha=\pi/2$

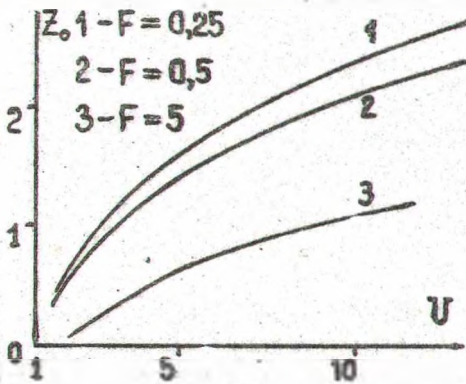


Рис. 4. Полудлина смачивания в зависимости от объема жидкости при $\alpha=\pi/2$

Следует отметить асимптотический характер уменьшения длины смачивания от параметра вращения в области больших деформаций. Поэтому определение предельного значения F , соответствующего стягиванию участка смачивания в точку, представляет трудности. Не исключено, что этот предел отсутствует. На практике максимально достижимые значения F будут сильно зависеть от уровня возмущений в реальной физической системе.

Важным параметром свободной поверхности является безразмерная кривизна мениска вблизи поверхности вала $\alpha_0 = l_0/d_0$ (d_0 - радиус кривизны мениска). По мере увеличения скорости вращения и приближения воронки к линии симметрии d_0 для смачивающих жидкостей становится в несколько десятков раз меньше ширины зазора l_0 . Как видно из рис. 5, при $\alpha = \pi/4$ достигается $\alpha_0 \approx 70$. В этом случае радиус кривизны $d_0 \approx 3$ мкм (при

$l_0 = 0,2$ мм), а капиллярное давление, препятствующее вытеснению жидкости из магнитного зазора центробежными силами, составляет $\sigma/d_0 \approx 0,1$ атм. (при $\sigma = 0,03$ Н/м). Магнитные силы обеспечивают перепад давления $\approx 0,5$ атм и, следовательно, смазывание является фактором, заметно увеличивающим надежность работы МЖУ при высоких скоростях вращения вала.

После центробежных сил, возникающих при азимутальном движении жидкости, $\rho v^2 / r_0 \vec{e}_x$ можно разложить на потенциальную и соленоидальную составляющие. Потенциальная составляющая уравнивается градиентом давления, а соленоидальная — возбуждает в объеме жидкости вторичное течение \vec{v}_1 . Согласно (11), поток завихренности, характеризующий интенсивность вторичного течения, однозначно выражается через циркуляцию центробежных сил. Вклад в циркуляцию на жестких участках контура l (т.е. на $l^{(f)}$) равен нулю, что позволяет представить её в виде

$$W \equiv \oint_l v^2 dl = W^{(s)} - W^{(0)}, \quad W^{(s)} = \int_0^s v^2 dx, \quad W^{(0)} = \int_0^1 v^2 \Big|_{z=0} dx. \quad (21)$$

При использовании в этих выражениях распределений скорости на свободной границе и на оси симметрии, найденных при решении сформулированной выше задачи, получим первое приближение для W . Представленные на рис. 6 результаты расчета позволяют сделать некоторые выводы относительно характера вторичного течения. При небольших "объемах" ($U \leq 3,5$) внутренняя составляющая циркуляции $W^{(0)}$ превышает периферийную сос-

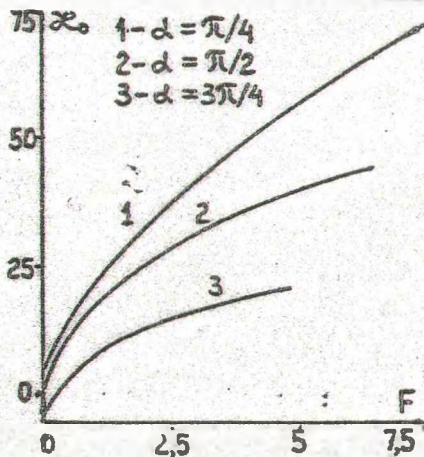


Рис. 5. Зависимость кривизны мениска от скорости вращения вала при $U = 2$.

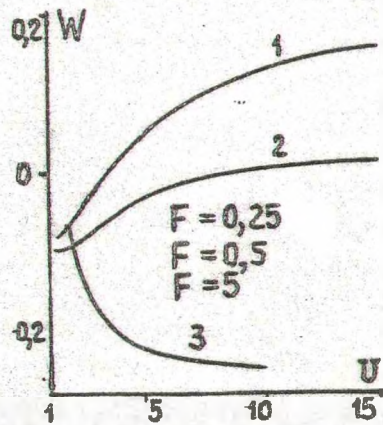


Рис. 6. Зависимость циркуляции центробежных сил от объема жидкости при $\alpha = \pi/2$.

тавляющую $W^{(=)}$, при достигнутых значениях F и будем иметь $W < 0$. В этом случае на оси симметрии жидкость движется от вала к концентратору, а на свободной поверхности - в обратном направлении. При умеренных и больших "объемах" ($W \geq 3,5$) имеет место смена знака: $W > 0$ при малых скоростях, $W < 0$ - при больших. Так, например, для $U = 4,53$ смена знака происходит при $F = 0,38$. Если в "объеме" реализуется одна конвективная ячейка, то смена знака W означает изменение направления циркуляции жидкости. Возможен также другой сценарий. При малых F в "объеме" между осью симметрии и свободной границей образуется конвективная ячейка с положительной циркуляцией. Однако по мере углубления воронки вблизи оси симметрии зарождается и прогрессирует вторичная ячейка с отрицательной циркуляцией. При достижении некоторого F интенсивность движения в обеих ячейках выравнивается и циркуляция для всего объема обращается в нуль. При дальнейшем увеличении F вторичная ячейка подавляет основную, оттесняя ее в застойную зону, примыкающую к поверхности концентратора вблизи точки контакта. Чтобы определить, какой из вариантов реализуется в действительности, требуется более детализированная модель. На основании полученных данных можно лишь утверждать, что в практически важной области невысоких значений параметра вращения ($F < 0,5$) деформация свободной поверхности является фактором, препятствующим развитию вторичного течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. - М.: Мир, 1989.
2. Орлов Л.П., Полевиков В.К., Фертман В.Е. // Трение и износ. - 1982. - Т. 3. № 1. - С. 123...128.
3. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. - М.: ИВТ АН СССР, 1985.
4. Вислович А.Н. // V Всесоюзное совещание по физике магнитных жидкостей. - Пермь, 1990. - С. 41...43.
5. Будник А.М., Полевиков В.К. // Дифференциальные уравнения. - 1992 - Т. 28. № 7. - С. 1177...1181.