УДК 519.624

И. Ф. Кулешова, ассистент

# ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАНТА МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНСЛОЕМ

For an ordinary differential equation with the boundary layer condition and a small parameter at the higher derivative modified method of differential orthogonal elimination is suggested. The method involves the regularization factors which neutralizes a rapid increase of the solution gradients in the boundary layer zones.

Рассмотрим типичные граничные задачи с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$Ly(x) \equiv \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq 0. \tag{2}$$

Численное решение таких задач сопряжено с рядом существенных трудностей, проявления которых неочевидны и многообразны, в частности, наблюдается понижение порядка сходимости разностных схем и неравномерная сходимость их на равномерных сетках.

Для сохранения устойчивости, обеспечения сходимости и других свойств для решения этих задач предлагается вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки (м. д. о. п.) с введением в зонах погранслоёв регулирующих множителей.

Суть м. д. о. п. состоит в следующем.

Рассмотрим граничные задачи для системы о. д. у.

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad a \leq x \leq b; \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1; \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $a_{ik}(x)$, $((i,k)=1,2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ - непрерывны на $[a,b]$ $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ - заданные постоянные. Предполагается, что существует и единственно искомое решение задачи (3,4), которое обозначим через $y_1(x)$ и $y_2(x)$. В виде системы (3) можно представить любое линейное о. д. у. типа (1,2), причём коэффициенты $a_{ik}(x)$ будут зависеть от $\varepsilon$, т. е. $a_{ik}(x) \equiv a_{ik}(x,\varepsilon)$. В свою очередь, граничные условия (4) являются весьма общими, что позволяет рассматривать более широкий класс задач.

Введём вспомогательную функцию $\theta(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ по формулам:

$$u = m_1(x,\varepsilon) y_1(x) \sin\theta(x) + m_2(x,\varepsilon) y_2(x) \cos\theta(x); \tag{5}$$

$$v = m_1(x,\varepsilon) y_1(x) \cos\theta(x) - m_2(x,\varepsilon) y_2(x) \sin\theta(x), \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$, $m_1(x,\varepsilon) > 0$, $m_2(x,\varepsilon) > 0$ - функции, в известной мере моделирующие профили пограничных слоёв. Выбор их в зонах погранслоёв должен быть согласован с поведением функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и должен быть таким, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon) y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon) y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы.

Из соотношений (5,6) получим выражения для $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$m_1(x,\varepsilon) y_1(x) = \sin\theta(x) u(x) + \cos\theta(x) v(x); \tag{7}$$

$$m_2(x,\varepsilon) y_2(x) = \cos\theta(x) u(x) - \sin\theta(x) v(x) \tag{8}$$

Продифференцировав (5,6) и заменив в полученных выражениях $y_1'(x)$ и $y_2'(x)$ по формулам (3), а $y_1(x)$, $y_2(x)$ - по формулам (7,8), будем иметь следующие уравнения:

$$u' = b_{11}(x) u + b_{12}(x) v + c_1(x); \tag{9}$$

$$v' = b_{21}(x) u + b_{22}(x) v + c_2(x). \tag{10}$$

$$b_{11}=\left(\frac{m_1'}{m_1}+a_{11}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{m_1}{m_2}a_{12}+\frac{m_2}{m_1}a_{21}\right)\sin\theta\cdot\cos\theta+\left(\frac{m_2'}{m_2}+a_{22}\right)\cos^2\theta;$$

$$b_{12}=\theta'+\left[a_{11}-a_{22}+\frac{m_1'}{m_1}-\frac{m_2'}{m_2}\right]\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{m_2}{m_1}a_{21}\cos^2\theta-\frac{m_1}{m_2}a_{12}\sin^2\theta;$$

$$b_{21}=\left[a_{11}-a_{22}+\frac{m_1'}{m_1}-\frac{m_2'}{m_2}\right]\sin\theta\cdot\cos\theta-\frac{m_2}{m_1}a_{21}\sin^2\theta+\frac{m_1}{m_2}a_{12}\cos^2\theta-\theta';$$

$$b_{22}=\left(a_{11}+\frac{m_1'}{m_1}\right)\cos^2\theta+\left(a_{22}+\frac{m_2'}{m_2}\right)\sin^2\theta-\left[\frac{m_1}{m_2}a_{12}+\frac{m_2}{m_1}a_{21}\right]\cos\theta\cdot\sin\theta;$$

$$c_1=m_1 f_1\sin\theta+m_2\cdot f_2\cdot\cos\theta;$$

$$c_2=m_1\cdot f_1\cos\theta-m_2\cdot f_2\cdot\sin\theta,$$

где аргументы у всех функций опущены для простоты записи.

Предлагаемый м. д. о. п. можно осуществить тогда, когда систему уравнений (9,10) удастся разделить. Положим $b_{12}(x)=0$. Получим:

$$\theta'+\left[a_{11}-a_{22}+\frac{m_1'}{m_1}-\frac{m_2'}{m_2}\right]\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{m_2}{m_1}a_{21}\cos^2\theta-\frac{m}{m_2}a_{12}\sin^2\theta=0. \quad (11)$$

Таким образом, о. д. у. для функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ таковы, что их можно решать последовательно, сначала уравнение (11), затем (9) и, наконец, (10).

Определим начальные значения для этих функций.

$$\sin\theta(a)=\frac{\sigma_1}{\omega_1};\qquad \cos\theta(a)=\frac{\sigma_2}{\omega_1}; \quad (12)$$

$$u(a)=\frac{\gamma_1}{\omega_1}; \quad (13)$$

где $\sigma_1=\dfrac{\alpha_1}{m_1(a,\varepsilon)}$; $\sigma_2=\dfrac{\beta_1}{m_2(a,\varepsilon)}$; $\omega_1=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

Начальное условие для функции $v(x)$ определим в точке $x=b$. Это будет иметь место при

$$v(b)=\frac{1}{\Delta}\left[\gamma_2-\left(\frac{\alpha_2}{m_1(b,\varepsilon)}\sin\theta(b)+\frac{\beta_2}{m_2(b,\varepsilon)}\cos\theta(b)\right)u(b)\right] \quad (14)$$

в предположении, что $\Delta=\dfrac{\alpha_2}{m_1(b,\varepsilon)}\cos\theta(b)-\dfrac{\beta_2}{m_2(b,\varepsilon)}\sin\theta(b)\neq 0.$

Теперь функцию $v(x)$ можно найти на $[a,b]$ как решение задачи Коши для о.д.у. (10) с начальным условием (14) в точке $x=b$. Это и будет обратная прогонка. После определения функций $\theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ искомое решение - функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ находятся по формулам (7,8). Проверкой легко устанавливается, что найденные таким образом функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются искомым решением.

Замечание 1. Мы рассмотрели вариант м.д.о.п., в котором сначала переносится слева направо левое граничное условие, что даёт преимущество в случае, когда погранслой имеет место на правом конце отрезка. Аналогично строится вариант м.д.о.п. в случае, когда погранслой для задачи (3) с условиями (4) имеет место на левом конце отрезка. В этом случае преимущественной будет левая ортогональная прогонка.

Возможен также случай, когда граничная задача имеет два пограничных слоя. Для этого случая предлагается форма двусторонней ортогональной прогонки, в которой компромиссно соединяются правая и левая ортогональные прогонки в некоторой внутренней точке $x_0 \in (a,b)$. Регулирующие множители $m_1^{(1)}(x,\varepsilon)$, $m_2^{(1)}(x,\varepsilon)$, использующиеся на отрезке $[a,x_0]$, выбираются с учётом погранслоя в точке $x=a$; аналогичные регулирующие множители $m_1^{(2)}(x,\varepsilon)$, $m_2^{(2)}(x,\varepsilon)$, использующиеся на отрезке $[x_0,b]$, учитывают погранслой в точке $x=b$. Как правило, эти регулирующие множители существенно различны, поскольку существенно различной является их роль и область определения. Мотивы выбора положения точки $x_0$ в известной мере сходны с мотивами разбиения области интегрирования в методах множественной пристрелки.

Рассмотрим приложение этой модификации м.д.о.п. к численному решению граничной задачи с двумя погранслоями [1].

$$\varepsilon y''(x)-(x-\tfrac{1}{2})y'(x)-y(x)=0; \quad 0\le x\le 1, \quad \varepsilon=10^{-5}; \tag{15}$$

$$y(0)=1; \quad y(1)=1. \tag{16}$$

В силу симметрии компромиссную точку целесообразно взять в середине отрезка. Таким образом, полагаем $x_0=0.5$. "Замораживание" коэффициентов в точках $x=0$ и $x=1$ и анализ собственных значений характеристического уравнения дают определённое представление о характере поведения в погранслоях. С целью понизить рост градиентов решения в погранслоях были выбраны регулирующие множители в следующем виде:

$$m_1^{(1)}(x,\varepsilon)\equiv 1;\ m_2^{(1)}(x,\varepsilon)=20(\varepsilon-1)x^2+12(1-\varepsilon)x+\varepsilon;\quad 0\le x\le 0.5;$$

$$m_1^{(2)}(x,\varepsilon)\equiv 1;\ m_2^{(2)}(x,\varepsilon)=20(\varepsilon-1)x^2+28(1-\varepsilon)x+9\varepsilon-8;\ 0.5\le x\le 1.$$

Результаты вычислений с этими множителями отражены в табл.

Табл. Численное решение задачи (15,16) с двумя погранслоями

| $x$ | $\Theta(x)$ | $y(x)$ |
|---|---|---|
| .000 | 1.57080 | 1.00001 |
| .012 | 2.77595 | .01604 |
| .050 | 2.26089 | 1.6466E-09 |
| .200 | 1.76011 | 3.0075E-34 |
| .500 | 1.61041 | 1.5618E-38 |
| .950 | .88[illegible]69 | 1.6167E-09 |
| .990 | .42432 | .04439 |
| .998 | 1.24459 | .36941 |
| 1.000 | 1.57080 | .99998 |

В табл. приведены значения решения $y(x)$ в некоторых, на наш взгляд, наиболее существенных точках сетки и на концах отрезка, в частности, получено: $y(0)$=1.00001 и $y(1)$=.99998. Эти значения контролируемы и их сравнение с условиями (18) говорит об очень высокой точности результатов.

В пользу предлагаемой методики говорят также свобода в выборе методов решения задач Коши, необходимый порядок точности, возможность использования переменного шага интегрирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. -М.,1983.