

УДК 517.958

С. С. Каянович, ст. преподаватель

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ОБЛАСТЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The existence and uniqueness of the solution of the Navier - Stokes type equations satisfying all the hydrodynamic equations were proved for some areas.

По вопросу о том, что дают уравнения Навье-Стокса для описания движений реальных жидкостей, можно спорить до сих пор. Остаются пока белые пятна в вопросах разрешимости этих уравнений, сохраняются парадоксы вязкой жидкости [1]. В связи с таким положением появляются новые подходы к решению этих уравнений [2].

В данной работе изучается видоизменённая система уравнений с соответствующими ей краевыми условиями. Выясняется, какое отношение имеет решение этой системы, если оно существует, к решению системы Навье-Стокса. Формулируются предположения, при которых рассматриваемая задача имеет единственное решение. Выполнение предположений связано с постановкой граничных условий. Максимальные области, в которых соответствующие условия могут быть поставлены, называются областями специального вида. В данной статье считаем, что сама рассматриваемая область является областью специального вида. Исследование проводится в двумерной области Ω простой геометрии, обладающей осью симметрии $x_2 = 0, 5L_2$ (рис. 1).

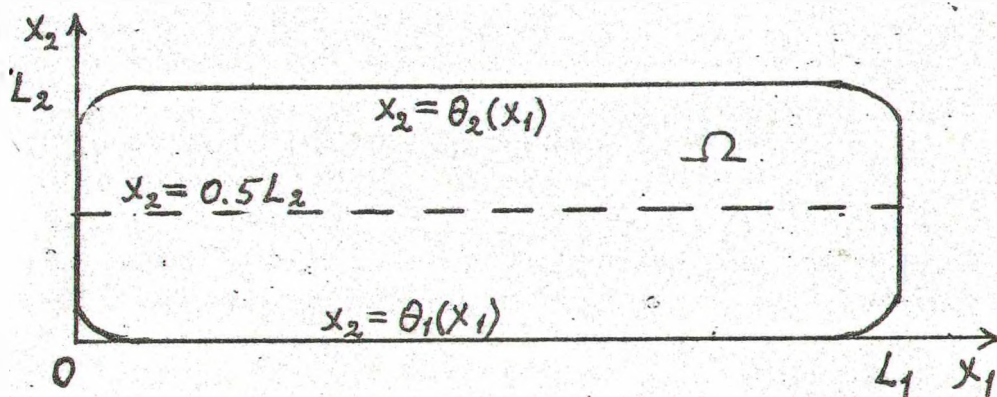


Рис. 1

В классической постановке задача имеет вид

$$u_{it} - \nu u_{ix_k x_k} + u_k u_{ix_k} = -P_{x_i} ; u_{kx_k} = 0 ; \quad (1), (2)$$

$$u_i|_{S_T} = \psi_i ; u_i|_{t=0} = a_i , \quad (3)$$

где S - граница области Ω , $S_T = S \times [0, T]$, $i=1, 2$, по k производится суммирование от 1 до 2. Решение задачи (1) - (3) ищется в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

Пусть область Ω (рис. 1) ограничена линиями: $x_2 = \theta_1(x_1)$, $x_2 = \theta_2(x_1)$, $x_1 = 0$, $x_1 = L_1$, причём $\theta_1(x_1) < \theta_2(x_1)$.

Будем рассматривать задачу

$$u_{it} - \nu u_{ix_k x_k} + u_k u_{ix_k} = -P_{x_i} ; u_{2x_2 x_2} = -u_{1x_1 x_1} ; \quad (4), (5)$$

$$P_{x_m x_m} = -f_m x_m ; u_i|_{S_T} = \psi_i ; u_i|_{t=0} = a_i ; \quad (6), (7), (8)$$

$$u_2|_{S'_T} = q ; u_2|_{S''_T} = -q ; \frac{\partial P}{\partial N}|_{S_T} = -f_m \cos \alpha_m , \quad (9), (10)$$

где $f_i = u_k u_{ix_k}$, $S'_T = \theta_1 \times [0, T]$, $q = q(x_1, t)$, $\frac{\partial P}{\partial N} \equiv P_{x_m} \cos \alpha_m$ -

- производная по направлению вектора $\bar{N}$ внешней нормали к S , α_i - угол между вектором $\bar{N}$ и осью x_i , по k, m производится суммирование от 1 до 2.

Будем говорить, что функция $w(x, t)$, определённая на

$\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup S$, обладает свойством чётности (нечётности) по x_2 , если для любой точки $(x, t) \in \bar{\Omega}_T$ имеет место равенство

$$w(x_1, L_2 - x_2, t) = w(x_1, x_2, t) \quad (w(x_1, L_2 - x_2, t) = -w(x_1, x_2, t)).$$

Лемма. Если решение u_1, u_2, p задачи (4) - (10) существует, принадлежит классу достаточно гладких в $\bar{\Omega}_T$ функций, функции u_1, p обладают свойством чётности, а функция u_2 - свойством нечётности по x_2 - выполняется равенство

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} u_{1x_1} dx_2 = 2q , \quad (11)$$

то это решение удовлетворяет всем уравнениям системы (1), (2).

Будем предполагать, что

$$\varphi_1 \in H^{\ell+5, \frac{\ell+5}{2}}(S_T); \varphi_2 \in H^{\ell+5, \frac{\ell+5}{2}}(S_T'); a_1 \in H^{\ell+5}(\bar{\Omega}); s \in H^{\ell+5}, \quad (12)$$

где $\ell > 0$ - нецелое число. Обозначения, связанные с пространствами Гёльдера (см. (12)), соответствуют [3]. Сделаем замену

$u_1 = v_1 + \varphi_1$, где φ_1 - какая-либо функция из пространства

$H^{\ell+5, \frac{\ell+5}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, обладающая свойством чётности по x_2 и равная φ_1 на S_T . Тогда равенства (4), (7) примут вид

$$v_{1t} - \gamma v_{1x_k x_k} + u_k v_{1x_k} + \varphi_{1x_1} v_1 = -p_{x_1} - \varphi_{1x_2} u_2 - \bar{\varphi}_1 \cdot v_1|_{S_T} = 0, \quad (4'), (7')$$

где $u_1 = v_1 + \varphi_1$, $\bar{\varphi}_1 = \varphi_{1t} - \gamma \varphi_{1x_k x_k} + \varphi_1 \varphi_{1x_1}$.

Замечание. Всюду в этой работе выражение "задача (в которой определяется давление) однозначно разрешима" будем понимать как утверждение, что давление p определяется с точностью до произвольного слагаемого, не зависящего от x (см. (1)-(3) и (4)-(10)).

Теорема. Если выполнены условия (12), функции φ_1, a_1 обладают свойством чётности по x_2 (каждая в своей области определения) и выполнены предположения 1 и 2 (см. ниже), то задача (4) - (10) имеет единственное решение u_1, u_2, p , причём u_1 непрерывна в $\bar{\Omega}_T$ и производные её, входящие в (4), непрерывны внутри Ω_T .

Доказательство. В соответствии с методом Ротэ [3] разобьём цилиндр $\bar{\Omega}_T$ плоскостями $t_j = j\tau$ ($j = 0, 1, 2, \dots, M$) на слои и предположим, ради сокращения записи, что $T/\tau = M$ есть целое число (τ выберем достаточно малым). Обозначим полученные сечения через Ω_j , а их границы через S_j . На каждом из этих слоёв, переходя последовательно от слоя Ω_j к слою Ω_{j+1} , определим функции $v_{1\tau}, u_{1\tau}, u_{2\tau}, p_\tau$.

На нижнем слое Ω_0 положим $v_{1\tau}(x, t_0) = a_1 - \varphi_1|_{t=0}$, $u_{1\tau}(x, t_0) = a_1$. Функцию $u_{2\tau}(x, t_0)$ найдём как решение задачи (5), (9), а задача (6), (10) с $u_i = u_{i\tau}(x, t_0)$ ($i=1, 2$) однозначно определяет $p_\tau(x, t_0)$ [4, 5]. Отметим, что найденные функции $u_{2\tau}, p_\tau$ принадлежат $H^{\ell+4}(\bar{\Omega}_0)$ и обладают: $u_{2\tau}$ свойст-

вом нечётности, p — свойством чётности по x_2 .

Для определения искомым функций на слое Ω_1 сначала опре-

делим последовательности функций $\bar{v}_1, \bar{u}_1, \bar{p}$ ($s=0, 1, 2, \dots$), являющихся решениями итерационной системы

$$\frac{1}{\tau}(\bar{v}_1^{s+1} - \bar{v}_1^s) - \nu \bar{v}_{1x_k x_k}^{s+1} + \bar{u}_k \bar{v}_{1x_k}^{s+1} = -\bar{p}_1^s - \varphi_{1x_1} \bar{v}_1^s - \varphi_{1x_2} \bar{u}_2^s - \bar{\varphi}_1; \quad (13)$$

$$\bar{u}_1^{s+1} = \bar{v}_1^{s+1} + \varphi_1; \quad \bar{p}_{x_m x_m}^{s+1} = -(\bar{u}_k \bar{u}_{1x_k}^{s+1})_{x_1} - (\bar{u}_k \bar{u}_{2x_k}^{s+1})_{x_2}, \quad (14), (15)$$

где $\bar{w} = w(x, t_0)$, $\bar{w} = w(x, t_c)$, $\bar{w} = \bar{w}(x, t_1)$ ($s=1, 2, 3, \dots$), а граничные условия очевидны. Заметим, что при каждом s задача

для $\bar{v}_1^{s+1}$ однозначно разрешима и её решение $\bar{v}_1^{s+1} \in H^{\ell+5}(\bar{\Omega}_1)$,

задача для $\bar{p}^{s+1}$ однозначно разрешима и $\bar{p}^{s+1} \in H^{\ell+4}(\bar{\Omega}_1)$ [4, 5], причём при каждом s найденные функции обладают свойством чётности по x_2 . Пусть на некоторой части S_1^0 границы S_1 , имеющей положительную меру, функции $\bar{p}^s$ равны постоянной величине, т.е.

$\bar{p}^s(x, t_1)|_{S_1^0} = C(t_1)$. Без потери общности можно считать, что

$C(t_1)=0$. Тогда $\|\bar{p}^s\|_{W_2^1}$ эквивалентна $\|\bar{p}^s\|_{L_2}$ [3].

Можно показать, что последовательности $\bar{v}_1^0, \bar{v}_1^1, \bar{v}_1^2, \dots$ и

$\bar{p}^0, \bar{p}^1, \bar{p}^2, \dots$ являются последовательностями Коши соответствен-

но в пространствах $W_2^2(\Omega_1)$ и $W_2^1(\Omega_1)$ и потому сходятся к

функциям $\bar{v}_{11} \in W_2^2(\Omega_1)$ и $\bar{p}_1 \in W_2^1(\Omega_1)$. Положим $v_{1\tau}(x, t_1) =$

$\bar{v}_{11}$, $u_{1\tau}(x, t_1) = \bar{v}_{11} + \varphi_1(x, t_1)$, $p_\tau(x, t_1) = \bar{p}_1$ и найдём $u_{2\tau} = u_{2\tau}(x, t_1)$, решив задачу (5), (9). Аналогично находим искомые функции на слоях $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_M$.

Предположение 1. При каждом j ($j=1, 2, \dots, M$) $\bar{p}^s(x, t_j)|_{S_j^0} =$

$= C(t_j)$, где $C(t)$ достаточно гладкая функция на $[0, T]$, и

$$\bar{v}_j \in H^{\ell+5}(\bar{\Omega}_j), \bar{p}_j \in H^{\ell+4}(\bar{\Omega}_j).$$

Определим на границах S_j ($j=0, 1, 2, \dots, M$) функции ψ_2^j ,

$\psi_{i\ell_1}^j$ ($i, \ell_1=1, 2$) следующим образом:

$$\psi_2^j|_{S_j} = u_{2\tau}(x, t_j)|_{S_j}; \quad \psi_{i\ell_1}^j|_{S_j} = u_{i\tau x_{\ell_1}}(x, t_j)|_{S_j}.$$

Предположение 2. Существуют единственные достаточно гладкие функции $\psi, \psi_{i\ell_1}$ ($i, \ell_1=1, 2$), определённые на S_T и такие, что

на каждом слое $\bar{\Omega}_j$ ($j=0, 1, \dots, M$) для $u_{i\tau}$ выполняется (11) и при $\tau \rightarrow 0$

$$\max_{S_j} |\psi_2^j - \psi_2| \rightarrow 0, \quad \max_{S_j} |\psi_{i\ell_1}^j - \psi_{i\ell_1}| \rightarrow 0.$$

При таких предположениях могут быть получены оценки, позволяющие выполнить предельный переход по $\tau \rightarrow 0$ и доказать теорему [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970.
2. Ладженская О. А. О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач // Труды МИ им. В. А. Стеклова. - 1967. - Т. 102. - С. 85-104.
3. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967.
4. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М.: Наука, 1964.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.
6. Ладженская О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений // Труды Моск. матем. об-ва. - 1958. - Т. 7. - С. 149-177.