УДК 621.47; 535.3.

А.В.Яценко, доцент

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

A structure of optical modes in toroidal open resonators with a parabolic refractive-index profile has been investigated theoretically. The maximum field position for low-order modes is found to coincide with a local maximum of the refractive index-by-radius product.

Ранее [1,2] в приближении геометрической оптики в рамках двумерной задачи была исследована на устойчивость задача о распространении света по кольцевым траекториям в радиально-симметричных средах при наличии локального максимума у функции $f(r)=n(r)r$, где $n(r)$ - показатель преломления среды, r - радиальная координата. Было показано, что в такой среде световые лучи осциллируют около окружности, радиус которой совпадает с локальным максимум функции $f(r)$. Следовательно, данная среда может служить резонатором, аналогичным резонатору Фабри-Перро.

Проведенное в работе [3] исследование такого резонатора в волновом приближении установило в нем наличие волн, подобных волнам обычного резонатора Фабри-Перро, однако ассимптотический метод решения волнового уравнения не позволил определить положение мод низших порядков.

Поэтому в данной работе получено точное решение приведенного скалярного волнового уравнения

$$\Delta\Psi+k^2(r,\theta,z)\Psi = 0 \qquad (1)$$

в цилиндрической системе координат r, θ, z для квадратичной осесимметричной среды вида

$$n^2(r,z) = n_0^2\left(1 - a^2z^2 - b^2r^2\right) \qquad (2)$$

В уравнении (1) под Ψ подразумевается любая поперечная компонента электромагнитного поля, $k(r,\theta,z)$ - волновое число. В равенстве (2) n - показатель преломления среды, n_0, a и b - постоянные числа.

Уравнение (1) решали методом разделения переменных, считая, что

$$\Psi(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z). \qquad (3)$$

В результате были получены следующие три уравнения относительно функции $\Theta(\theta)$, $Z(z)$ и $P(r) = R(r)\sqrt{r}$:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\beta^2; \qquad (4)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\alpha^2 - k_0^2a^2z^2\right)Z = 0; \qquad (5)$$

$$\frac{d^2P}{dz^2} + \left[k_0^2\left(1 - b^2r^2\right) - \alpha^2 - \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right]P = 0, \qquad (6)$$

где k_0 - волновое число в центре системы, α, β - постоянные разделения.

Решение уравнения (6) имеет вид

$$\Theta = e^{-i\beta\theta}, \qquad (7)$$

причем резонанс в азимутальном направлении будет иметь место при $\beta = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям ограниченности $|\Psi(0)|$ и равенству нулю $\Psi(r,\theta,z)$ на бесконечности, может быть получено лишь для дискретных значений α, выражающихся соотношением [4]

$$\alpha^2 = (2n + 1)k_0a, \quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (8)$$

и имеет вид

$$Z\left(\frac{z}{z_0}\right)=H_n\left(\frac{z}{z_0}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \tag{9}$$

где $H_n\left(\frac{z}{z_0}\right)$ - полиномы Эрмита, а $z=\frac{1}{\sqrt{k_0\alpha}}$.

Уравнение (6) сводится к известному [5] уравнению Уиттекера, единственное решение которого, удовлетворяющее условию ограниченности $|\Psi(0)|$, записывается с помощью вырожденного гипергеометрического ряда ${}_1\mathcal{F}_1$ следующим образом:

$$R(r)=e^{-\frac{k_0br^2}{2}}r^{\beta}{}_1\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{k_0-a(2n+1)}{4b};1+\beta;k_0br^2\right) \tag{10}$$

Это решение при $r\to\infty$ ограничено лишь в случае, когда

$$\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{k_0-a(2n+1)}{4b}=-m\ ,\quad m=0,1,2,... \tag{11}$$

Следовательно, постоянная β может принимать следующие дискретные значения:

$$\beta_{mn}=\frac{k_0-a(2n+1)}{2b}-(2m+1)\ ,\ \ n=0,1,2,...\ ;\ \ m=0,1,2,... \tag{12}$$

В этом случае решение (10) представляется в виде

$$R(r)=e^{-\frac{k_0br^2}{2}}r^{\beta_{mn}}L_m^{(\beta_{mn})}\left(k_0br^2\right), \tag{13}$$

где $L_m^{(\beta_{mn})}\left(k_0br^2\right)$ - полиномы Лагерра [5].

Из условия ограниченности $|\Psi(0)|$ следует, что $\beta_{mn}\geq 0$, поэтому

$$0\leq m\leq\frac{1}{2}\left[\frac{k_0-a(2n+1)}{2b}-1\right] \tag{14}$$

Итак, решение уравнения (3) есть сумма произведений решений (7), (9) и (13) при допустимых значениях индексов m и n.

Рассмотрим характер частных решений (или иначе мод резонатора) при малых значениях индексов m и n. Так, при m=0 $L_0^{(\beta 0n)}=\mathrm{const}$, поэтому локальный экстремум в этом случае функция R(r), описываемая выражением (13), имеет в точке

$$r_{max}=\frac{1}{b\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{a(2n+1)}{k_0}-\frac{2b}{k_0}} \tag{15}$$

или при $r_{max}\approx 1/b\sqrt{2}$, т.к. $a/k_0<<1$ и $b/k_0<<1$. Но величина $1/b\sqrt{2}$ есть точка, в которой для n(r) вида (2)

$$\frac{\partial}{\partial r}n(r,0)r=0 \tag{16}$$

Итак, в волновом приближении показано, что поле в рассматриваемой системе локализовано в торолдальной области, радиус которой совпадает с максимумом функции n(r,0)r.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christiansen W.H., Bruchner A.P. Appl. Opt., 14, №7, 1975.
2. Яценко А.В. В сб.: Вопросы энергопереноса в неоднородных средах. Мн., 1975.
3. Carlson F.P., Shi N.K. J. Opt. Soc. of. Am., 16, №11, 1971.
4. Шифф Л. Квантовая механика. - М., 1959.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., 1962.