УДК 532.5.011.12

С.С.Каянович, ст. преподаватель

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА И ПАРАДОКСЫ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

The paper deals with the study of a velocity orthogonal component for the case of viscous fluid flow between solid surfaces. It is established that 1) the component is equal to 0 (i.e. the flow is pouzeling) only with the Reinold's numbers Re less than some critical Re'_{cr}; 2) there is a class of flows which occupy intermediate position between pouzeling flows and turbulent ones; 3) the flow of above class doesn't become pouzeling flow at any distance from the entry into the pipe.

В гидродинамике считается известным: 1) что при любом числе Рейнольдса Re единственными возможными решениями уравнений Навье-Стокса в бесконечно длинной трубе являются решения, которым соответствуют течения Пуазейля (введение [1]); 2) что течения Пуазейля наблюдаются в действительности для Re, не превосходящих некоторого критического значения, при переходе через которое они становятся турбулентными [1], [2]; 3) что течение с ламинарным пограничным слоем после прохождения начального участка трубы становится пуазейлевым [3].

В данной статье устанавливается: 1) что решения уравнений Навье-Стокса, которым соответствуют течения Пуазейля, являются возможными не при любом числе Re, а лишь при значениях Re, меньших некоторого конкретного критического $Re'_{кр}$; 2) что существует класс течений (они в статье называются регулярными), занимающих промежуточное положение между пуазейлевыми и турбулентными течениями; 3) что регулярное течение остается регулярным на всём протяжении трубы и не переходит в течение Пуазейля. В основу статьи положены известные факты гидродинамики.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость вынуждена под действием давления двигаться между двумя неподвижными параллельными пластинками (твердыми стенками), расположенными в плоскостях $y=\pm h$. Рассматриваемое движение может быть названо течением жидкости сквозь "плоскую" трубу [2]. Предположим, что движение происходит только в направлении оси Ox, т.е. из трех компонент скорости u, v, w, остается лишь одна u, а остальные две равны нулю, и что труба бесконечно длинная ($|x|<\infty$). При таких предположениях система Навье-Стокса существенно упрощается и мы находим, что эпюрой скорости в произвольном сечении $x=x_0$ является парабола (парабола Пуазейля) [2]

$$u = -\frac{h^2}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right), \tag{1}$$

где μ - динамический коэффициент вязкости, p - давление, зависящее только от x, $dp/dx=\text{const}$.

Как показывают опыты, движение (1), при котором линии тока есть прямые, параллельные оси трубы Ox, и которое является ламинарным, в действительности осуществляется, если только число Рейнольдса Re не превосходит некоторого определенного критического своего значения, после чего движение перестает быть ламинарным и переходит в турбулентный режим [2]. Для течений вида (1) (плоское пуазейлево течение) существует критическое число $Re'_{кр}$, определяющее границу устойчивости по отношению к возмущениям конечной интенсивности [3]. Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $Re<Re'_{кр}$ они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они ни были. Напротив, при $Re>Re'_{кр}$ движение станет *турбулентным на всём протяжении трубы*, причем для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше Re [3].

Другими словами, для имеющихся в данном конкретном опыте возмущений существует критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$, при котором течение фактически переходит в турбулентный режим. Путем удаления возмущений на входе в трубу или уменьшения начальной их интенсивности можно значительно повысить $\mathrm{Re}_{кр}$ [2], а это значит, что существует класс течений, которые определяются неравенствами $\mathrm{Re}'_{кр}<\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{кр}$ и которые, следовательно, не являются турбулентными.

Из приведенных выше фактов следует вывод: при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}'_{кр}$ движение жидкости обладает "механизмом", способным гасить возмущения произвольной силы, при $\mathrm{Re}'_{кр}<\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{кр}$ - "механизмом", способным подавлять возмущения вполне определенной для данного числа Re силы и все более слабые. Этот "механизм", меняющийся при переходе числа Рейнольдса через значение $\mathrm{Re}'_{кр}$, является принадлежностью самого течения и определяется, стало быть, параметрами движущейся жидкости и области течения.

В динамике идеальной жидкости имеет место закон сохранения полной механической энергии. В отличие от идеальной жидкости, полная механическая энергия в потоке вязкой жидкости не сохраняется, а рассеивается в пространстве, причем необратимый переход механической энергии в тепло (ее диссипация) происходит благодаря работе сил вязкости [2]. Подчеркнем, что единственным движением вязкой несжимаемой жидкости, не сопровождаемым диссипацией механической энергии, является квазитвердое ее движение [2]. Отсюда вывод: суть "механизма", подавляющего возмущения, заключена в наличии у движущейся в трубе жидкости вязких сил.

Когда мы имеем течение, параллельное оси Ox, так что $v=w=0$, причем скорость течения u есть функция одного только y, мы имеем для касательного напряжения τ выражение [4]

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Учитывая (1), находим

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y, \quad \tau = \frac{dp}{dx}y.$$

Поскольку y меняет знак, запишем последнее равенство в виде

$$\tau = \frac{dp}{dx}|y|. \tag{2}$$

Так как при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}'_{кр}$ течение в трубе пуазейлево, т.е. имеет вид (1), а сколь угодно сильные возмущения непременно затухнут, то можно считать установленным, что вязкого напряжения (или силы вязкости, действующей на единицу площади) (2), которое обеспечивается скоростью (1), достаточно для подавления возмущений произвольной силы. Если течение происходит при некотором определенном числе Re из интервала $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$, то существуют возмущения, определяющие нижнюю границу тех возмущений, которые не могут быть подавлены имеющимся в течении вязким напряжением. Отсюда следуют два замечательных факта: 1) вязкое напряжение при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$ не является напряжением (2), а соответствующее течение при таком Re не является течением (1), причем *на любом сколь угодно большом расстоянии от входа в трубу*; 2) переход от пуазейлева движения при $Re<Re'_{кр}$ к новому типу течения при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$ имеет не плавный, а скачкообразный характер, поскольку резко "отсекается" (не поддается подавлению) целый диапазон возмущений, которые подавлялись напряжением (2).

Можно рассуждать и так. Если h и μ фиксированы, то рост числа Re (в интервале $Re<Re'_{кр}$) происходит за счет скорости, т.е., как показывает формула (1), за счет увеличения (по модулю) dp/dx. Но тогда согласно (2) растет касательное напряжение τ (по мод.). Таким образом, если бы при переходе через $Re'_{кр}$, который соответствует увеличению Re и, следовательно, увеличению dp/dx, течение сохранило бы вид (1), то его вязкие силы возросли бы и, значит, тем более должны были бы подавлять возмущения произвольной интенсивности, поскольку их подавляли даже меньшие силы вязкости, соответствовавшие течению при $Re<Re'_{кр}$. Эксперимент же говорит, что происходит обратное: перестает подавляться целый диапазон возмущений. Последнее возможно лишь в том случае, когда течение становится качественно иным, другими словами, перестает быть пуазейлевым. Следовательно, течения, происходящие при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$, не являются ни турбулентными, ни пуазейлевыми. Такие течения будем называть регулярными.

Вспомним теперь, что пуазейлево течение было получено в предположении, что имеется лишь одна ненулевая компонента скорости u, а компоненты v и w равны нулю. Отсюда вывод: наше предположение о том, что v=0, w=0, подтверждается опытом при $Re<Re'_{кр}$ и противоречит ему при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$. Поэтому при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$ уравнения Навье-Стокса надо решать, не используя предположение, которое заведомо неверно при этих числах Re.

Переходим к парадоксам, приведенным в [1]. Поскольку основой для их построения служат решения уравнений Навье-Стокса, полученные при однотипных предположениях, то из двух парадоксов, о которых идет речь в [1], достаточно рассмотреть только один. Он состоит в следующем: известно, что при любом числе Рейнольдса Re единственными возможными решениями уравнений Навье-Стокса в бесконечно длинной трубе (пусть она направлена по оси x), для которых $\overline{V}$ параллелен оси трубы и равен нулю на ее границе, являются

$$v_x = a\left(c^2 - r^2\right), \quad v_r = v_\theta = 0\,, \tag{3}$$

где c - радиус трубы, а a - свободный числовой параметр. Однако соответствующие им течения (течения Пуазейля) наблюдаются для Re, не превосходящих некоторого критического значения, при переходе через которое они становятся турбулентными.

Заметим, что указанные в парадоксе решения есть решения упрощенных линейных уравнений, которые появляются в результате предположения о равенстве нулю составляющих скорости v_r и v_θ (см., напр., [3]). Но из вышесказанного следует, что такое предположение противоречит опыту при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$, и потому нет оснований считать, что решения (3) являются решениями системы Навье-Стокса при указанных Re - последние еще должны быть найдены. Однако уже сейчас можно привести некоторые соображения, говорящие в пользу утверждения: если при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$ существует единственное достаточно гладкое решение системы Навье-Стокса v_x, v_r, v_θ, p (в обозначениях [1]), то $v_r\neq 0$. Другими словами, это решение не соответствует течению Пуазейля, т.е. решения, о которых говорится в сформулированном парадоксе, как о возможных, являются невозможными. Эти соображения излагаются ниже (для простоты рассуждений, но не для принципиальных упрощений, вернемся к плоской трубе).

Итак, пусть течение происходит в плоской трубе Ω длины L,

где $$\Omega = \left\{(x, y)\middle| 0 < x < L, \ -h < y < h\right\}, \tag{4}$$

и пусть рассматривается стационарная задача [1]

$$-\nu u_{xx} - \nu u_{yy} + uu_x + vu_y = -p_x \tag{5}$$

$$-\nu v_{xx} - \nu v_{yy} - uv_x + vv_y = -p_y; \tag{6}$$

$$u_x + v_y = 0\,, \tag{7}$$

$$u|_s = \varphi\,, \quad v|_s = \psi\,, \tag{8}$$

где S - граница Ω. Пусть решение этой задачи u, v, p существует, единственно и принадлежит классу достаточно гладких в $\overline{\Omega}$ функций. Обозначим

$$S^{(1)} = \{(x, y) | 0 \le x \le L, \quad y = h\},$$

т.е. $S^{(1)}$ - твердая стенка трубы. В силу (8)

$$u_x|_{s^{(1)}} = \varphi_x ; \tag{9}$$

а в силу (7) и (9)

$$v_y|_{s^{(1)}} = -\varphi_x . \tag{10}$$

Таким образом, гладкое в $\overline{\Omega}$ решение задачи (5) - (8), кроме условий (8), должно удовлетворять еще и дополнительному граничному условию (10), которое в постановку задачи не входит явно, но присутствует в этой постановке благодаря уравнению неразрывности (7). Ясно, что подобные условия существуют и на второй стенке, а также на входе и выходе трубы . Чтобы эти дополнительные условия не сказывались на разрешимости нашей задачи (не переопределяли ее), они должны выполняться автоматически, а поэтому функции φ и ψ не могут быть произвольными.

Обратимся к опыту вычислительной гидродинамики. Известно, что достоверные результаты удается практически получать лишь в диапазоне значений чисел Рейнольдса до 10^3 [5]. Обратим внимание, что порядок указанной величины в точности совпадает с порядком $Re'_{кр}$ [3]. Таким образом, при $Re<Re'_{кр}$ течение пуазейлево, а уравнения Навье-Стокса, как известно [2], его описывают. Поэтому, при таких Re они дают v=0 (естественно, при постановке граничного условия $v|_s=0$). Но в этом случае, как нетрудно заметить, условия вида (10) выполняются автоматически и не могут переопределить задачу (5) - (8) ($u|_{y=\pm h}=0$ - условия прилипания).

При $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$ (диапазон чисел Re после 10^3) уравнения Навье-Стокса перестают "исправно работать", поскольку задача (5) - (8) оказывается, по-видимому, переопределенной условиями вида (10). Последнее означает, что эти условия перестают выполняться автоматически, а это, в свою очередь, - что решение (если оно существует, единственное и гладкое) перестает соответствовать течению Пуазейля.

Общий вывод. Нет оснований считать, что решения (3) являются возможными решениями уравнений Навье-Стокса при $Re'_{кр}<Re<Re_{кр}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. -М.:Наука, 1970.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.:Наука, 1987.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.:Наука, 1988.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. -М.:Гос.изд.физ.-мат.лит., 1963.-Часть 2.
5. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. -М.:Наука, 1984.