УДК 519.624

И.Ф.Кулешова, ассистент

ПОЛУЧЕНИЕ ГРАНИЦ СПЕКТРА МАТРИЦ ЯКОБИ В МЕТОДЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ ДВУСТОРОННЕЙ ПРИСТРЕЛКИ

For nonlinear boundary value problems with boundary lauer the method of multiple double-sided shoot is proposed. The bounds of the spectrum of the Jacobi matrix and condition numbers are calculated by experiment.

Разработка новых численных методов и приложение к численному решению нелинейных граничных задач, в том числе к нелинейным задачам с малым параметром при старшей производной и пограничными слоями, трудных и сложных в вычислительном отношении, требуют достаточно полного анализа и информации о поведении решения задачи, его свойствах и т.д. Только в этом случае гарантировано успешное применение практически всех вычислительных алгоритмов. Если такой анализ и информацию не удается обеспечить априорно или их нельзя сделать достаточно полными, то проблема численного решения нелинейных граничных задач существенно осложняется, а в ряде случаев вообще остается открытой. По этой причине важное значение приобретает построение и исследование таких вычислительных алгоритмов, которые обладали бы способностью адаптироваться и гибко использовать численную информацию, получаемую в ходе выполнения вычислительного эксперимента [1].

Рассмотрим систему нелинейных о.д.у. первого порядка с малым параметром при производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $f:[a,b] \times R^n \to R^n$, $\varepsilon \rangle 0$.

Предположим, что зависимость f от ε такова, что в соответствующих граничных задачах, которые мы далее будем рассматривать, могут возникать пограничные либо внутренние переходные слои. Особая роль ε естественным образом транслируется через решение граничной задачи. Далее, для целей компактизации записей вместо $f(t, y, \varepsilon)$ будем писать $f(t, y)$.

Присоединим к уравнению (1) двухточечное граничное условие наиболее общего вида:

$$g(y(a), \; y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $g: R^n \times R^n \to R^n$. Отметим, что в условие (2) может также входить параметр ε. Предположим, что отображения f, g и отрезок $[a, b]$ таковы, что задача (1,2) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

Для самых сложных случаев, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, резкими перепадами, осцилляциями, а в ряде случаев и разрывами первого рода, алгоритм метода решения задачи следует строить таким образом, чтобы он мог адаптироваться к выявленным в процессе вычислительного эксперимента свойствам решения и обладал бы необходимой для этих целей гибкостью. Предлагаем для решения таких задач метод множественной двусторонней пристрелки (м.м.д.п.) [2] . В нём имеется возможность выбора точек пристрелки, точек сшива решений, выбора параметров пристрелки, длин положительных и отрицательных подынтервалов с тем, чтобы были созданы необходимые условия для качественного моделирования траектории искомого решения. М.м.д.п заключается в следующем:

$$\left.\begin{aligned} & u' = f(t, u),\ t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t_{2j-1} \le t \le t_{2j}\}, \\ & u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ y_{2j-1} \in R^n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} & v' = f(t, v),\ t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ & v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ j = \overline{1, m} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$a = t_0 \langle t_1 \langle t_2 \langle \ldots \langle t_{2m-2} \langle t_{2m-1} \langle t_{2m} = b,$$

где t_{2j-1} - точки пристрелки; t_{2j}- точки сшива решений; y_{2j-1} –параметры пристрелки. Замыкающую систему уравнений запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} & u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0,\ j = \overline{1, m-1}, \\ & g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$H(z) = 0, \tag{6}$$

где $H: R^N \to R^N$, $N = m \times n$, $z = \left(y_1^T, y_3^T, \ldots, y_{2m-1}^T\right)^T$.

Пусть $y(t)$ - искомое решение граничной задачи (1,2). Обозначим $y_{2j-1}^* = y(t_{2j-1})$ и $z^* = \left(y_1^{*T}, y_3^{*T}, \ldots, y_{2m-1}^{*T}\right)^T$. Очевидно, что $H(z^*) = 0$ и z^* - искомое решение замыкающей системы (5). В этом случае искомое решение $y(t)$ граничной задачи (1,2) может быть представлено формулой

$$\underset{a\le t\le b}{y(t)} = \begin{cases} v\left(t, y_{2j-1}\right), \ t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u\left(t, y_{2j-1}^{*}\right), \ t \in J_{2j-1}^{(+)}, \ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{7}$$

Для матрицы Якоби $\dfrac{\partial H}{\partial Z}$ в случае системы (6) получим:

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)}, & -V_3^{(2)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & U_3^{(4)}, & -V_5^{(4)}, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & U_{2m-3}^{(2m-2)}, & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ G_1, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & G_{2m-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

где

$$U_{2j-1}^{(2j)} = \frac{\partial u\left(t_{2j}, y_{2j-1}\right)}{\partial y_{2j-1}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad V_{2j+1}^{(2j)} = \frac{\partial v\left(t_{2j}, y_{2j+1}\right)}{\partial y_{2j+1}};$$

$$j = \overline{0, m-1}, \quad G_1 = \frac{\partial g(M)}{\partial v} \cdot V_1^{(0)}, \quad G_{2m-1} = \frac{\partial g(M)}{\partial u} \cdot V_{2m-1}^{(2m)};$$

$$M = \left(v\left(t_0, y_1\right), u\left(t_{2m}, y_{2m-1}\right)\right).$$

О свойствах матрицы Якоби (8) можно судить предметно, если достаточно полно будут описаны ее блоки.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} & U'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(u) \cdot U_{2j-1}(t), \\ & U_{2j-1}\left(t_{2j-1}\right) = I, \ t \in J_{2j-1}^{(+)}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\Phi_{2j-1}(u) = \dfrac{\partial f\left(t, u\left(t, y_{2j-1}\right)\right)}{\partial u}$; $\quad U_{2j-1}(t) = \dfrac{\partial u\left(t, y_{2j-1}\right)}{\partial y_{2j-1}}$.

$$\left.\begin{aligned} & V'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(v) \cdot V_{2j-1}(t), \\ & V_{2j-1}\left(t_{2j-1}\right) = I, \ t \in J_{2j-1}^{(-)}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$\Phi_{2j-1}(v) = \frac{\partial f\left(t, v\left(t, y_{2j-1}\right)\right)}{\partial v}; \quad V_{2j-1}(t) = \frac{\partial v\left(t, y_{2j-1}\right)}{\partial y_{2j-1}};$$

$$j = \overline{1, m}; \quad U_{2j-1}^{(2j)} = U_{2j-1}\left(t_{2j}\right), \quad V_{2j-1}^{(2j-2)} = V_{2j-1}\left(t_{2j-2}\right).$$

Для решения замыкающей системы используем метод Ньютона:

$$1. \ \frac{\partial H\left(z^{(k)}\right)}{\partial z} \cdot \Delta z^{(k)} = -H\left(z^{(k)}\right). \tag{11}$$

$$2. \ z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta z^{(k)}, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{12}$$

$$\Delta z^{(k)} = \left(\Delta z_1^{(k)T}, \Delta z_3^{(k)T}, \ldots, \Delta z_{2m-1}^{(k)T}\right)^T,$$

$$H = \left(h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \ldots, h_m^{(k)}\right)^T, \quad h_i^{(k)} = h_i\left(z^{(k)}\right).$$

Практическая реализация м.м.д.п. и его качества зависят, главным образом, от того, какие имеются возможности влияния на следующих его основных этапах: 1) выбор числа подынтервалов пристрелки; 2) определение длин подынтервалов пристрелки; 3) определение параметров пристрелки и их локализация; 4) регулировка свойств замыкающей системы уравнений и ее оптимизация по числу уравнений; 5) определение пристрелочных траекторий; 6) организация итерационных процессов и их оптимизация. Такая зависимость может быть выявлена методом вычислительного эксперимента.

Рассмотрим для этой цели нелинейную граничную задачу, лежащую в основе физической модели, описывающей ограничение столба плазмы. Эта задача оценивается как достаточно сложная в вычислительном отношении.

Математическая запись задачи имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = y_2, \\ y_2' = \lambda \operatorname{sh} \lambda y_1, \quad 0 \le t \le 1, \\ y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \end{array}\right\} \qquad (13)$$

где $\lambda > 0$. Чем больше λ, тем более сложным является характер решения $y_1(t)$ и его производной $y_2(t)$. Это объясняется тем, что решение $y_1(t)$ является гладкой функцией на $[0;1]$, но в области $t=1+0$ решение имеет особую точку и $y_1(t+0) = \infty$. При этом особая точка располагается тем ближе к $t=1$, чем большим взято значение λ. На отрезке $[0;1]$ вблизи правого конца картина решения приобретает форму пограничного слоя.

Пусть $\lambda = 5$. За начальное приближение выберем $y^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} t^{10} \\ 10t^9 \end{bmatrix}$. Рассмотрим несколько вариантов выбора подынтервалов пристрелки $J_{2j-1}^{(+)}$ и $J_{2j-1}^{(-)}$ и изучим свойства матриц Якоби для соответствующих систем уравнений. Положим

$$J_1^{(-)} = \left[t_1^{(0)}; t^{(1)}\right], \; J_1^{(+)} = \left[t^{(1)}; t^{(2)}\right], \; J_3^{(-)} = \left[t^{(2)}; t^{(3)}\right], \; J_3^{(+)} = \left[t^{(3)}; t^{(4)}\right].$$

Здесь $t^{(0)} = 0, t^{(4)} = 1$, а положение точек $t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}$ подлежит определению и испытанию.

Введем обозначение $H_0 = \dfrac{\partial H(z^0)}{\partial z}$ и образуем матрицу $B = H_0^T \cdot H_0$. Для вычисления $\nu(H_0)$ - числа обусловленности матрицы Якоби H_0 определяем верхнюю $\beta(B)$ и нижнюю $\alpha(B)$ грани матрицы B по правилу:

$$\hat{z}^{(k+1)} = B\left(\frac{\hat{z}^{(k)}}{\left\|\hat{z}^{(k)}\right\|}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad \hat{z}^{(k)} \in R^n,$$

$$\beta(B) = \lim_{k \to \infty}\left\|\hat{z}^{(k)}\right\|, \quad \omega^{(k+1)} = C\left(\frac{\omega^{(k)}}{\left\|\omega^{(k)}\right\|}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$C = \beta(B)E - B, \quad \omega^{(k)} \in R^4, \quad \beta(C) = \lim_{k \to \infty}\left\|\omega^{(k)}\right\|,$$

$$\alpha(B) = \beta(B) - \beta(C).$$

Итерации векторов $\hat{z}^{(k)}$ и $\omega^{(k)}$ проводились до тех пор, пока не достигалась точность

$$\left\|\left\|\hat{z}^{(s+1)}\right\| - \left\|\hat{z}^{(s)}\right\|\right\| \langle \frac{1}{2} \cdot 10^{-5},$$

$$\left\|\left\|\omega^{(p+1)}\right\| - \left\|\omega^{(p)}\right\|\right\| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Искомое значение $\nu(H_0)$ вычислялось по формуле:

$$\nu(H_0) = \sqrt{\frac{\beta(B)}{\alpha(B)}}.$$

Результаты вычислений отражены в таблицах 1, 2.

Анализ таблиц 1,2 устанавливает зависимость внутренних свойств матриц Якоби от выбора точек пристрелки и длин подынтервалов $J^{(+)}$ и $J^{(-)}$.

Табл.1 Виды разбиений P_i

i	P_i	$t^{(0)}$	$t^{(1)}$	$t^{(2)}$	$t^{(3)}$	$t^{(4)}$
1	P_1	0	.25	.50	.75	1
2	P_2	0	.10	.20	.25	1
3	P_3	0	.50	.80	.90	1

Табл.2 Численные значения границ спектра матрицы Якоби и чисел обусловленности

i	$\beta(B)$	$\beta(C)$	$\alpha(B)$	$\nu(H_0)$
1	147.612	147.099	.512802	16.9661
2	495.849	495.352	.497650	31.5660
3	173.254	173.109	.144516	34.6243

ЛИТЕРАТУРА

1. Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем/Пер.с англ. М., 1983. С.200.
2. Кулешова И.Ф., Монастырный П.И., Радаева В.А. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем//ДАН БССР.1989. Т.33, №2. С.106-109.