

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ ДРОБЛЕНИЯ

A distribution which generalizes  $\Gamma$ -distribution, the Weibull-Gnedenko and the Maxwell distributions is investigated. A method for describing an experimental statistical series by this distribution is elaborated. Dispersed composition of liquid phase is described for various methods of splitting.

Рассмотрим распределение непрерывной неотрицательной случайной величины  $X$  с функцией плотности

$$f(x) = Ax^m e^{-bx^n}, \quad n > 0. \quad (1)$$

Представим функцию (1) в виде

$$f(x) = \frac{A}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^m e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^n}, \quad n > 0. \quad (2)$$

данная функция обобщает гамма-распределения ( $n=1$ ), распределение Вейбулла-Гнеденко ( $m=n-1$ ), распределение Максвелла ( $m=2, n=2$ ). Данные распределения применяются в статистических методах исследования физических процессов, в теории надежности, для описания дисперсного состава частиц дробления [1,3]. Выполним замену  $T=X/a$ , из условия нормирования при  $(m+n)/n > 0$  находим коэффициент  $A$  и получим

$$f(t) = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} t^m e^{-t^n}, \quad n > 0. \quad (3)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины  $T$  заменой  $y^n=z$  сводится к неполной гамма-функции [4]

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{n}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \int_0^t y^m e^{-y^n} dy = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \int_0^{t^n} z^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-z} dz = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \gamma\left(\frac{m+1}{n}, t^n\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные моменты порядка  $\nu$  непрерывных случайных величин  $T$  и  $X$  выражаются через значения гамма-функции

$$M_\nu(T) = \int_0^{+\infty} t^\nu f(t) dt = \Gamma\left(\frac{m+\nu+1}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \quad M_\nu(X) = a^\nu M_\nu(T) \quad (5)$$

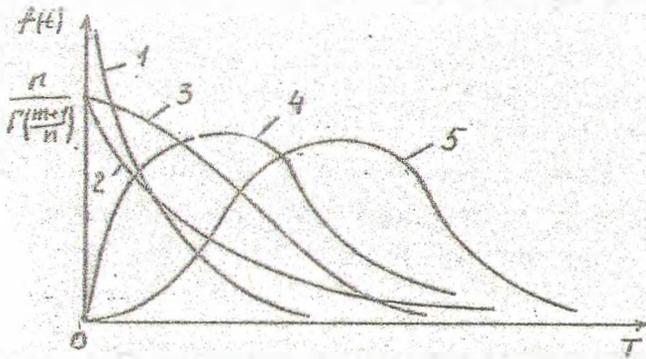
Свойства и характеристики распределения непрерывной случайной величины  $X$  определяются однозначно распределением безразмерной случайной величины  $T$ . Если  $m/n > 0$ , то функция плотности имеет точку максимума

$$t_{\max} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad x_{\max} = at_{\max} = a \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Для функции распределения данная точка будет точкой перегиба. На рис.1, 2 приведены графики функций плотности и распределения случайной величины  $T$  для различных значений параметров  $m$  и  $n$ .

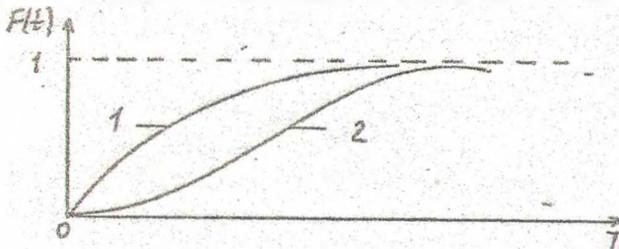
Найдем характеристическую функцию распределения случайной величины  $X$ :

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x) dx = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \int_0^{+\infty} e^{i\xi at} t^m e^{-t^n} dt.$$



- 1 -  $-1 < m < 0, n > 0$
- 2 -  $m = 0, 0 < n \leq 1$
- 3 -  $m = 0, n > 1$
- 4 -  $0 < m \leq 1, n > 0$
- 5 -  $m > 1, n > 0$

Рис.1. Функция плотности распределения (3) случайной величины  $T$



- 1 -  $-1 < m \leq 0, n > 0$
- 2 -  $m > 0, n > 0$

Рис.2. Функция распределения (4) случайной величины  $T$

Выполнив замену  $t^n = y$  и разлагая функцию  $e^{i\xi a t}$  в ряд, находим

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi a y^{\frac{1}{n}})^k}{k!} y^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi a)^k}{k!} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m+k+1}{n}-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{n}\right)}{\Gamma(k)} (i\xi a)^k$$

Для исследования сходимости полученного ряда используем формулу Стирлинга и получим

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{m+k+1}{n}\right)^{\frac{1}{k}}}{\Gamma(k)} \right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{-\frac{m+k+1}{n}} \left(\frac{m+k+1}{n}\right)^{\frac{m+k+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{e^{-k} k^{k-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ e^{-\frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} / e^{-1} k} \right] = e^{-\frac{1}{n} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{\frac{1}{n}-1}}$$

Данный предел существует и равен нулю, если  $n < 0$  или  $n > 1$ .

Таким образом, при  $n > 1$  ряд сходится и характеристическая функция аналитическая при любых значениях  $\xi$ . В этом случае распределение (3) однозначно определяется своими моментами.

Рассмотрим применение обобщенного гамма-распределения для описания непрерывной случайной величины, заданной статистическим рядом. На основании метода моментов потребуем совпадения начальных моментов (5) распределения (2) и выборочных моментов. Тогда

$$\left[ M_v(T) / M_v(\bar{X}) \right]^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{a}.$$

Для определения неизвестных параметров  $m$ ,  $n$  и  $a$  распределения (2) применим метод наименьших квадратов. Будем находить минимум функции

$$S = \sum_v \left\{ \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}} - \frac{1}{a} \right\}^2. \quad (6)$$

При минимизации функции  $S$  градиентными методами требуется вычислять ее производную, а следовательно, и производную гамма-функции. Производную гамма-функции выразим через ее логарифмическую производную [4]

$$\psi(y) = \frac{d}{dy} \ln \Gamma(y) = \frac{1}{\Gamma(y)} \frac{d}{dy} \Gamma(y).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dy} \Gamma(y) = \psi(y) \Gamma(y).$$

Производные функции  $S$  будут

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2 \sum_v \left\{ \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}} - \frac{1}{a} \right\} \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}} \cdot \frac{\psi\left(\frac{m+v+1}{n}\right) - \psi\left(\frac{m+1}{n}\right)}{vn};$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = -2 \sum_v \left\{ \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}} - \frac{1}{a} \right\} \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}}.$$

$$\frac{(m+v+1)\psi\left(\frac{m+v+1}{n}\right) - (m+1)\psi\left(\frac{m+1}{n}\right)}{vn^2};$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -\frac{2}{a^2} \sum_v \left\{ \left[ \frac{M_v(T)}{M_v(\bar{X})} \right]^{\frac{1}{v}} - \frac{1}{a} \right\}.$$

Применим рассмотренное распределение к описанию дисперсного состава частиц дробления. Если предположить, что плотности распределения количества частиц от их диаметра описывается зависимостью (1), тогда плотность распределения величины порядка  $X^k$  будет

$$f_k(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_k(x + \Delta x) - F_k(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} x^k =$$

$$= A_k f(x) x^k = A_k x^{m+k} e^{-bx^n}, \quad n > 0.$$

Последняя зависимость имеет вид (1) и описывает плотность распределения количества ( $k=0$ ), размера ( $k=1$ ), поверхности ( $k=2$ ) и объема ( $k=3$ ) частиц дробления.

В таблице 1 приведены параметры распределения (1-4) при описании дисперсного состава жидкой фазы для различных способов дробления и разных методов определения дисперсности. Для описываемых статистических распределений вычислялись выборочные моменты до 6-го порядка. Минимизация функции (5) проводилась методом наискорейшего спуска [5]. Для среднего выборочного значения диаметров капель жидкости в аппарате с вращающимся ротором [6] была получена зависимость

$$\bar{X} = 0.089 \left( \frac{\pi N}{30} \right)^{-0.064} \left( \frac{d}{D} \right)^{0.81} \cdot 10^6 \quad (7)$$

в пределах изменения частоты вращения ротора  $N=1000-2300$  об/мин, диаметра диспергирующего стакана до 300 мм и размером отверстий в стакане  $d=1.3-3$  мм.

Полученные распределения дисперсного состава были использованы для исследования процессов разделения фаз в поле центробежных сил [6,7].

Таблица 1. Описание дисперсного состава частиц дробления жидкости.

N п/п	Источ- ник инфор- мации	Способ дисперсирования	Среднее значение, мкм	Параметры распределения (2,3)		
				m	n	a, мкм
1	2	3	4	5	6	7
1	Автор [6]	Вращающийся ротор	Формула (7)	1.754	3.635	$\bar{X}$ 0.808
2	Автор [7]	Пневматическая форсунка	20.064	0.052	1.276	26.14
3	Лышев- ский [8]	Форсунка высокого давления	36.86	1.775	1.413	24.05
4	Погсон [9].	Срыв потоком газа	41.18	2.671	1.085	13.91

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2. Пер. с англ. - М.:Мир,1984.-738 с.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надежности. - М.,1965.-236с.
3. Коузов П.А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов.-Л.: Химия, 1987. -264 с.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. -М.:Наука, 1977.-458с.
5. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1988.-128с.
6. Исследование процесса диспергирования жидкости в роторном аппарате/В.А.Марков, В.К.Волков и А.М.Волк//Изв. вузов. Энергетика. 1991. №6.-С.94-98.
7. Левданский Э.И., Плехов И.М., Волк А.М. Исследование разделения газожидкостных потоков в центробежных сепараторах //ТОХТ. -1987.-N2.-С.273-277.
8. Лышевский А.С. Процессы распыливания топлива дизельными форсунками. М.:Машгиз,1963.-180с.
9. Погсон, Робертс, Вейблер. Исследование распределения жидкости при дисперсно-кольцевом режиме течения.- Тр. Амер. общ. инжен.-механ. Сер.С. Теплопередача. 1970.-Т.92. -N4. -С.79-88.