УДК 515.2

Ж.Н.Горбатович, доцент

КОНСТРУИРОВАНИЕ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО ДВУМ ПЛОСКИМ СЕЧЕНИЯМ

Analitic method designing tors surfaces by two plane sections is considered.

Из практики использования торсовых поверхностей следует отметить их применение при конструировании транспортирующих органов машин (в частности, шнеков), фасонных частей трубопроводов, обшивки корпусов и суперкавитирующих гребных винтов скоростных судов, рабочих поверхностей корпусов плугов, при проектировании крыльев самолетов, при проектировании противоэрозионных валов и насыпей при подъеме и закруглении дороги, для аппроксимации сложных поверхностей и поверхностей перехода.

Часто приходится конструировать торсовую поверхность по отдельным ее плоским сечениям, которые обладают определенными свойствами, в частности, по двум плоским кривым, лежащим в параллельных или перпендикулярных плоскостях.

Рассматривается один из возможных подходов к конструированию торсовой поверхности по двум плоским сечениям, расположенным в параллельных плоскостях. Торсовая поверхность образована касательными к некоторой пространственной кривой P, которая называется ребром возврата. Пусть параметрические уравнения кривой P $X_p=\varphi(s)$, $Y_p=\psi(s)$, $Z_p=$[illegible](s), тогда уравнения поверхности будут иметь вид $X=X_p+X'_p \cdot V$, $У=Y_p+Y'_p \cdot V$,

$Z=Z_p+Z'_p \cdot V$, где (s,v) - криволинейные координаты точки на торсовой поверхности.

Легко показать, что если кривые σ и λ, являющиеся плоскими сечениями торсовой поверхности, лежат в параллельных плоскостях, то касательные к ним в точках пересечения с образующей поверхности параллельны.

Уравнения образующих торсовой поверхности можно записать в виде

$$\frac{X-\varphi(s)}{\varphi'(s)}=\frac{Y-\psi(s)}{\psi'(s)}=\frac{Z-\xi(s)}{\xi'(s)} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} Y=\psi(s)+\dfrac{\psi'(s)}{\varphi'(s)}X-\dfrac{\psi'(s)}{\varphi'(s)}\varphi(s)=k(s)X+l(s)\,, \\ Z=\xi(s)+\dfrac{\xi'(s)}{\varphi'(s)}X-\dfrac{\xi'(s)}{\varphi'(s)}\varphi(s)=m(s)X+n(s)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Легко показать, что $-\dfrac{l'(s)}{k'(s)}=-\dfrac{n'(s)}{m'(s)}=\varphi(s)=X_p.$ (3)

Условие (3) является необходимым условием торсовости линейчатой поверхности.

Пусть в плоскости XOY и в параллельной ей плоскости Z=d лежат кривые σ и λ соответственно, являющиеся плоскими сечениями некоторой торсовой поверхности. Требуется найти уравнения ребра возврата торса.

Обозначим координаты точек M и N, через которые пройдет образующая поверхности, соответственно (x,y,0) и (x_λ, y_λ, d). Приведем уравнения образующей MN к виду

$$\begin{cases} Y=\dfrac{y_\lambda-y}{x_\lambda-x}X+y-\dfrac{y_\lambda-y}{x_\lambda-x}x=k(x)X+l(x)\,, \\ Z=\dfrac{d}{x_\lambda-x}X-\dfrac{d}{x_\lambda-x}x=m(x)X+n(x)\,. \end{cases} \tag{4}$$

Выберем в качестве параметра абсциссу точки M. Так как образующая проходит через те точки σ и λ в которых касательные параллельны, то $x_\lambda=x_\lambda(x)$ и $y_\lambda=y_\lambda(x)$. Тогда

$$X_p(x)=-\frac{n'(x)}{m'(x)}=\frac{x\cdot x'_\lambda-x_\lambda}{x'_\lambda-1}\,. \tag{5}$$

Если $X_p(x)$ подставить в (4), то получим $Y_p(x)$ и $Z_p(x)$, т.е. параметрические уравнения ребра возврата. Из (5) видно, что если $x_\lambda=ax+b$, то торсовая поверхность вырождается в конус или цилиндр.

Пример 1. Пусть σ - окружность $x^2+y^2=R^2$, $Z=0$, а r - окружность $x^2+y^2=r^2$, $Z=d$. Тогда, если $R\neq r$, то развертывающаяся поверхность, для которой эти кривые являются плоскими сечениями, - конус с вершиной на оси OZ, а если $R=r$, то цилиндр.

На кривой λ найдем точку N, через которую пройдет образующая, из условия параллельности касательных в точках M и N: $\frac{y'}{x'}=\frac{y_\lambda'(x)}{x_\lambda'(x)} \Rightarrow x_\lambda=\frac{r}{R}x$ и $x_\lambda'(x)=\frac{r}{R}$. Соответствующие выкладки дают $X_p=0$, $У_p=0$, $Z_p=\frac{dR}{R-r}$. Это значит, что ребро возврата выродилось в точку, т.е. имеем конус.

Пример 2. Пусть кривая σ в плоскости XOY - парабола $y=b-ax^2$, а кривая λ в плоскости $Z=d$ - полуокружность $x^2+y^2=r^2$. Тогда координаты точки M $(x,y,0)$, а точки N - кривая λ - $(x_\lambda, y_\lambda, d)$. Исходя из сказанного выше, получаем $x_\lambda=\frac{2arx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$, и соответствующие выкладки дают

$$\begin{cases} X_p(x)=\dfrac{8a^3rx^3}{\sqrt{\left(1+4a^2x^2\right)^3}-2ar}, \\ Y_p(x)=\dfrac{r-\left(b-ax^2\right)\sqrt{1+4a^2x^2}}{\left(2ar-\sqrt{1+4a^2x^2}\right)\cdot x}\left(X_p-x\right)+\left(b-ax^2\right), \\ Z_p(x)=\dfrac{d\sqrt{1+4a^2x^2}}{x\cdot\left(2ar-\sqrt{1+4a^2x^2}\right)}\left(X_p-x\right). \end{cases}$$

Пример показывает, что хотя принципиально вопрос о нахождении торсовой поверхности и решен, но уравнения поверхности даже для простейших плоских кривых получаются достаточно сложными. Получив зависимость параметра x от длины дуги s ребра возврата, можно найти развертку торсовой поверхности и плоских сечений.

По двум плоским сечениям проектируется обшивка корпуса судна, рабочая поверхность корпуса плуга, строительные оболочки; построены выставочные павильоны с полуэллипсами и параболами в торцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. - М.: УДН, 1988. - 157с.
2. Бхаттачария Б. Расчет оболочек в виде торсовых поверхностей с двумя произвольными плоскими направляющими кривыми: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 - М., 1970. - 23с.
3. Горбатович Ж.Н. Кривые второго порядка как плоские сечения торсовых поверхностей одинакового наклона.- Минск, 1990. -6с. -Деп. в ВИНИТИ 04.01.91, N 107 - В91.