УДК 517.977.1

В.М.Марченко, профессор

И.М.Борковская, аспирант

# О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

The paper considers the problem of the stabilization of second-order time-delay systems by action of a feedback in the form of difference regulator. In the case the question of existence of a difference regulator is open a linear integral feedback is constructed by using the well-known Paley-Wiener theorem concerning entire functions of exponential type.

1. *Историческая справка.* Проблема стабилизации - одна из основных проблем качественной теории управления динамическими системами. Для систем с запаздыванием эта проблема была впервые рассмотрена Красовским и Осиповым [1,2]. Для ее решения использовалась линейная обратная связь интегрального типа $u(t) = \int_{-h}^{0} \left[dQ(s)\right]x(t+s)$, $t>0$, где $Q(s)$ - $(1*n)$-матрица-функция, компонентами которой являются функции ограниченной вариации на интервале $[-h,0]$.

Представляет интерес рассмотрение разностных регуляторов [3,4] вида $u(t) = \sum_{j=0}^{N} q_j x(t-jh)$, где $q_j \in R$; $j=0, 1,\dots,N$ (N -

натуральное число, штрих означает транспонирование), реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. В работе рассмотрена проблема стабилизации линейных двумерных систем с запаздыванием воздействием разностного регулятора, предложен метод построения интегральной обратной связи, основанный на теореме Винера-Пэли [5] для целых функций экспоненциального типа.

2. *Постановка задачи и основные результаты.* Рассмотрим систему $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + b\ u(t),\ t > 0,$ (1)

$(x(t) \in R^n;\ u(t) \in R\ , t>0;\ \ b \in R^n; A$ и $A_1$ -постоянные $(n*n)$-матрицы, $h=const>0)$ и линейную обратную связь интегрального типа

$$u(t) = \int_{-h}^{0} dq\ (s)\ x(t+s). \tag{2}$$

а также разностного типа

$$u(t) = q_0{}'x(t) + q_1{}'x(t-h). \tag{3}$$

*Определение.* Систему (1) назовем стабилизируемой регулятором (3), если соответствующая замкнутая система является асимптотически устойчивой, т.е. найдутся n-векторы $q_0$ и $q_1$ такие, что корни уравнения $\det[\lambda I\text{-}A\text{-}\exp(\text{-}\lambda h)A_1\text{-}b(q_0{}'+\exp(\text{-}\lambda h)q_1{}')I=0$ имеют отрицательные действительные части. Аналогично, система (1) стабилизируема воздействием линейной обратной связи (2), если найдется вектор-функция $q(s)$ ограниченной вариации, при которой корни уравнения $\det\left[\lambda I - A_1 - \exp(-\lambda h)A - b\int_{-e}^{0}\exp(\lambda s)dq'(s)\right] = 0$ имеют отрицательные действительные части.

Рассмотрим систему (1) при n=2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \tag{4}$$

и регулятор (3). Обратную связь (3) запишем в операторной форме:

$$u(t) = [\beta_1(\exp(-ph))\beta_2(\exp(-ph))]\,x(t),$$

где

$$\beta_1(\exp(-ph)) = \beta_{10} + \beta_{11}\exp(-ph),\ \beta_2(\exp(-ph)) = \beta_{20} + \beta_{21},$$

$$\exp(-ph);[\beta_{10},\beta_{20}] = q_0{}',[\beta_{11},\beta_{21}I = q_1{}', \exp(-ph)x(t) = x(t-h), p = \frac{d}{dt}.$$

Известно [1, 2, 5], что условие –

rank $[\lambda I$ - A - $\exp(\text{-}\lambda h)$ $A_1, b]=n, \forall\ \lambda \in C$ ,$Re\ \lambda \geq 0$, (5) необходимо для стабилизируемости системы (1) линейной обратной связью (2), а следовательно, и регулятором (3). Поэтому условие (5) будем предполагать выполненным. Существуют две возможности: 1) $\det[b,A_1b] = 0$, 2) $\det[b,A_1b] \neq 0$. В случае 1): Условие $\det[b,A_1b] = 0$ означает, что b - собственный вектор матрицы $A_1$, т.е. $A_1b = A_1b = a_{22}^1 b\left(\exists\, a_{22}^1 \in R\right)$. Если b является и собственным вектором матрицы A, т.е. $Ab = a_{22}\, b$ ($\exists\, a_{22} \in R$), то преобразование x=Ty, T=[d,b] (det T≠0) приводит систему (1), (4) к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} a_{11}^1 & 0 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{6}$$

$\left(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{11}^1, \alpha_{21}^1\right.$ - действительные числа $\left.\right)$. (5) сводится к условию

$$\lambda - \alpha_{11} - \alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h) \neq 0, \forall \lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda \geq 0. \tag{7}$$

*Утверждение 1.* Условие (7) является достаточным для стабилизируемости системы (1), (4) регулятором (3).

*Доказательство.* Положим $s_{10}$ , $s_{20}$ , $s_{11}$ , $s_{21}$ - действительные числа такие, что уравнение $\lambda$ - $s_{20}$ - $s_{21}$ exp(- $\lambda h$ ) = 0 не имеет корней с отрицательными действительными частями, например $s_{20}<0$, $s_{21} = 0$. Характеристическое уравнение системы (1), (4), замкнутой регулятором

$$u(t) = \left[-\alpha_{21} + s_{10}, -\alpha_{22} + s_{20}\right] y(t) + \left[-\alpha_{21}^1 + s_{11}, -\alpha_{21}^1 + s_{21}\right] y(t-h),$$

записывается в виде $\left(\lambda - \alpha_{11} - \alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h)\right)\left(\lambda - s_{20} - s_{21} \exp(-\lambda h)\right) = 0$ и не имеет корней в левой полуплоскости. Поэтому система (6), а следовательно, и (1), (4) в этом случае стабилизируема регулятором (3).

*Лемма.* Пусть $\alpha$ и $\beta$ - действительные числа. Тогда корни уравнения $\lambda + \alpha + \beta$ exp(- $\lambda h$) = 0 имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка $(\alpha,\beta)$ принадлежит области устойчивости $\Omega$, граница которой описывается линиями (рис.1):

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos hg = 0, \\ g - \beta \sin hg = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h} \quad (L). \tag{8}$$

Более того, если точка $(\alpha,\beta)$ лежит в области $\Omega_1$ (рис.2), то утверждение леммы справедливо для всех h>0 [7]. Имеет место

*Теорема 1.* В случае $\det[b, Ab] = 0$, $\det[b, A_1 b] = 0$ система (1), (4) стабилизируема регулятором (3) тогда и только тогда, когда точка $\left(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1\right)$ из (6) принадлежит области $\Omega$.

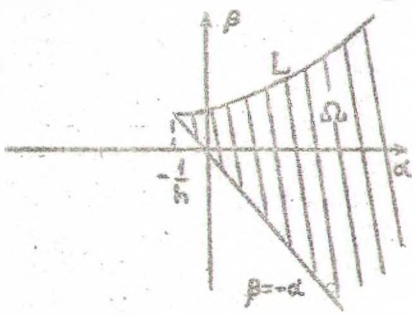


Рис.1

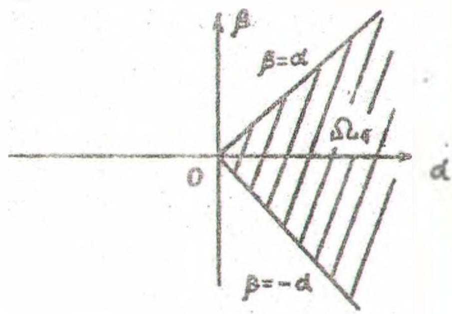


Рис.2

В случае 1) предположим, что $\det[b,Ab]\neq 0$. Преобразование $x=Ty$, $T = [Ab - (a_{11} + a_{22})b, b]$ приводит систему (1), (4) к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_{20} & -r_{10} \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (9)$$

($r_{10}, r_{20}, \alpha_{11}^1, \alpha_{21}^1, \alpha_{22}^1$ - некоторые действительные числа).

Полагая $u(t) = [r_{20}, r_{10}]\, y(t) - \left[\alpha_{21}^1, \alpha_{22}^1\right] y(t-h) + v(t)$, имеем

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \qquad (10)$$

Замыкая систему (10) обратной связью

$$v(t) = \left[\eta_1(\exp(-ph)),\ \ \eta_2(\exp(-ph))\right] y(t),\ \ p = \frac{d}{dt}, \qquad (11)$$

$\eta_1(\exp(-ph)) = \eta_{10} + \eta_{11}\exp(-ph)$, $\eta_2(\exp(-ph)) = \eta_{20} + \eta_{21}\exp(-ph)$, $\eta_{ij} \in R$; $i = 1,2$; $j = 0,1$, приходим к характеристическому квазиполиному

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h) & -1 \\ -\eta_1(\exp(-\lambda h) & \lambda - \eta_2(\exp(-\lambda h)) \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda(\alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h) +$$

$$+\eta_2(\exp(-\lambda h)) + \alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h)\, \eta_2(\exp(-\lambda h)) - \eta_1(\exp(-\lambda h)) \overset{\text{def}}{=} \otimes$$

замкнутой системы. Пусть $\lambda_0>0$, $(\alpha,\beta) \in\Omega$ (например, $\alpha > |\alpha_{11}^1|$). Тогда уравнение $(\lambda+\lambda_0)(\lambda+\alpha+\beta\exp(-\lambda h))=0$ не имеет корней с отрицательной действительной частью. Потребуем теперь, чтобы

$$\otimes = (\lambda + \lambda_0)(\lambda + \alpha + \beta\exp(-\lambda h)) = \lambda^2 + \lambda(\alpha + \lambda_0 + \beta\exp(-\lambda h)) +$$

$$+\lambda_0(\alpha + \beta\exp(-\lambda h)). \qquad (12)$$

Для этого положим $a_{11}^1 \exp(-\lambda h) + \eta_2(\exp(-\lambda h) =$ $= -\alpha - \lambda_0 - \beta \exp(-\lambda h)$, $\alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h)\eta_2(\exp(-\lambda h)) - \eta_1(\exp(-\lambda h)) =$ $= \lambda_0(\alpha + \beta \exp(-\lambda h))$. Имеем:

$\eta_1(\exp(-\lambda h)) = -\lambda_0(\alpha + \beta \exp(-\lambda h)) - \alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h)(\alpha + \lambda_0 + \beta \exp(-\lambda h) +$ $+\alpha_{11}^1 \exp(-\lambda h))$, $\eta_2(\exp(-\lambda h)) = -\alpha - \lambda_0 - \beta \exp(-\lambda h) - \alpha_{11} \exp(-\lambda h)$.

Пусть далее $\beta + \alpha_{11} = 0$. Тогда

$$\eta_1(\exp(-\lambda h)) = -\alpha \lambda_0 - \alpha_{11}^1 \alpha \exp(-\lambda h),\ \eta_2(\exp(-\lambda h)) = -\alpha - \lambda_0. \quad (13)$$

В итоге искомый регулятор можно выбрать в виде

$$u(t) = [r_{20} - \alpha\lambda_0, r_{10} - \alpha - \lambda_0]y(t) - [\alpha_{21}^1 + \alpha\alpha_{11}^1, \alpha_{22}^1]y(t-h) \quad (14)$$

*Теорема 2.* Если $\det[b, Ab] \neq 0$ and $\det[b, A_1 b] = 0$, то система (1), (4) стабилизируема обратной связью (3) при любом запаздывании $h>0$.

В случае 2) после преобразования $x=Ty$, $T=[A_1 b+r_{11} b, b]$ получаем

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_{22} & -r_{11} \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (15)$$

Полагая

$$u(t) = [-\alpha_{21}, -\alpha_{22}]y(t) + [r_{22}, r_{11}]y(t-h) + v(t), \quad (16)$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} - \exp(-\lambda h) \\ -\eta_1(\exp(-\lambda h)) & \lambda - \eta_2(\exp(-\lambda h)) \end{bmatrix} = 0$$

замкнутой системы. При $\alpha_{11}<0$ система стабилизируема обратной связью при $\eta_1(\exp(-ph)) = 0$ и подходящем выборе $\eta_2(\exp(-ph))$. При $\alpha_{11}>0$ потребуем, чтобы характеристический квазиполином имел вид $(\lambda + \alpha_1 + \beta_1 \exp(-\lambda h))(\lambda + \alpha_2 + \beta_2 \exp(-\lambda h)) \equiv \lambda^2 + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 +$ $+(\beta_1 + \beta_2)\exp(-\lambda h)) + (\alpha_1 + \beta_1 \exp(-\lambda h))(\alpha_2 + \beta_2 \exp(-\lambda h)), \lambda \in C$,

где $(\alpha_1, \beta_1) \in \Omega$, $(\alpha_2, \beta_2) \in \Omega$. Отсюда получаем

$$\eta_2(\exp(-\lambda h)) = -\alpha_{11} - \alpha_1 - \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)\exp(-\lambda h),$$

$$\eta_1(\exp(-\lambda h)) = \frac{-\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)\exp(-\lambda h)}{\alpha_{12} + \exp(-\lambda h)} +$$

$$+\frac{-(\alpha_1 + \beta_1 \exp(-\lambda h))(\alpha_2 + \beta_2 \exp(-\lambda h))}{\alpha_{12} + \exp(-\lambda h)}, \quad \lambda \in C.$$

Поскольку $\eta$ $(\exp(-\lambda h))$ должно быть квазиполиномом, потребуем, чтобы

$$-\alpha_{11}\left(\alpha_{11}+\alpha_1+\alpha_2-(\beta_1+\beta_2)\alpha_{12}\right)-(\alpha_1-\alpha_{12}\beta_1)(\alpha_2-\alpha_{12}\beta_2)=0. \quad (17)$$

Принимая во внимание, что $(\alpha_1,\beta_1)\in\Omega$, $(\alpha_2,\beta_2)\in\Omega$, заключаем, что $\alpha_{11}<\dfrac{1}{h}$ при $\alpha_{12}=0$ . В этом случае регулятор выбираем в виде

$$u(t)=\left[-\alpha_{21}-\alpha_{11}\beta_1-\alpha_{11}\beta_2-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,-\alpha_{22}-\alpha_{11}-\alpha_1-\alpha_2\right]y(t)+$$
$$+\left[r_{22}-\beta_1\beta_2,r_{11}-\beta_1-\beta_2\right]y(t-h).$$

Пусть $a_{12}\neq 0$. Из (17): $\beta_1=\dfrac{\alpha_{11}+\alpha_1}{\alpha_{12}}$ т.к. $(\alpha_1,\beta_1)\in\Omega,(\alpha_2,\beta_2)\in\Omega$, то

$$\begin{cases}\alpha_1=-\dfrac{g\cos hg}{\sin hg},\\ \dfrac{g\cos hg}{\sin hg}<\dfrac{\alpha_{11}+\alpha_1}{\alpha_{12}}<\dfrac{g}{\sin hg},\ 0<g<\dfrac{\pi}{h},\\ (\alpha_2,\beta_2)\in\Omega.\end{cases} \quad (18)$$

Поскольку $\sin hg>0$, $0<g<\dfrac{\pi}{h}$, то неравенство (18) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha_{12}>0,\\ -\alpha_{12}g<g\cos hg-\alpha_{11}\sin hg<-\alpha_{12}g\cos hg,\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha_{12}<0,\\ -\alpha_{12}g\cos hg<g\cos hg-\alpha_{11}\sin hg<-\alpha_{12}g.\end{cases}\end{array}\right. \quad (19)$$

Зафиксируем $g$, $0<g<\dfrac{\pi}{2h}$. Тогда из (19) получим (см.рис.3)

$$\begin{cases}\alpha_{12}>\dfrac{\sin hg}{g}\alpha_{11}-\cos hg,\\ \alpha_{12}<\dfrac{\operatorname{tg} hg}{g}\alpha_{11}-1,\end{cases}\quad \alpha_{11}\geq 0,\ \alpha_{12}>0,\qquad \text{или}$$

$$\begin{cases}\alpha_{12}<\dfrac{\sin hg}{g}\alpha_{11}-\cos hg,\\ \alpha_{12}>\dfrac{\operatorname{tg} hg}{g}\alpha_{11}-1,\end{cases}\quad \alpha_{11}\geq 0,\ \alpha_{12}<0.$$

Если $g\to\dfrac{\pi}{2h}$, то из (19) следует, что (см.рис.4)

$$\begin{cases}\alpha_{12}>\dfrac{2h}{\pi}\alpha_{11},\\ \alpha_{11}>0.\end{cases}$$

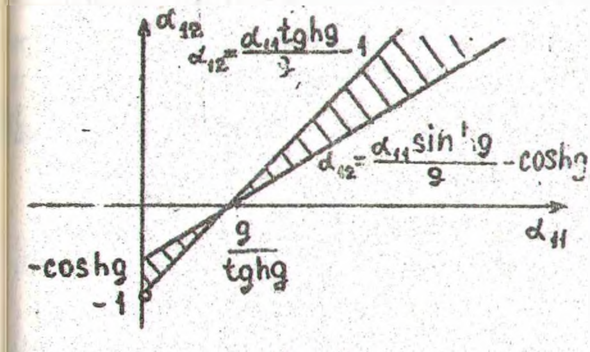


Рис.3

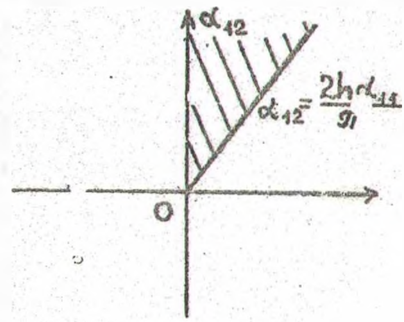


Рис.4

Зафиксируем теперь g, $\frac{\pi}{2h} < g < \frac{\pi}{h}$ . Из (19) имеем (см.рис.5):

$$\begin{cases} \alpha_{12} > \dfrac{\sin hg}{g}\,\alpha_{11} - \cos hg, \\ \alpha_{12} > \dfrac{\operatorname{tg} hg}{g}\,\alpha_{11} - 1, \end{cases} \qquad \alpha_{11} \geq 0,\ \alpha_{12} > 0, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} \alpha_{12} < \dfrac{\sin hg}{g}\,\alpha_{11} - \cos hg, \\ \alpha_{12} < \dfrac{\operatorname{tg} hg}{g}\,\alpha_{11} - 1, \end{cases} \qquad \alpha_{11} \geq 0,\ \alpha_{12} < 0.$$

Для точки (0,-1) условие (5) не выполнено, поэтому система не является стабилизируемой при $\alpha_{11} = 0$ и $\alpha_{12} = -1$. Анализируя изменение параметра g,$0 < g < \frac{\pi}{h}$ (см.рис. 3-5), получим область $\Omega_2$

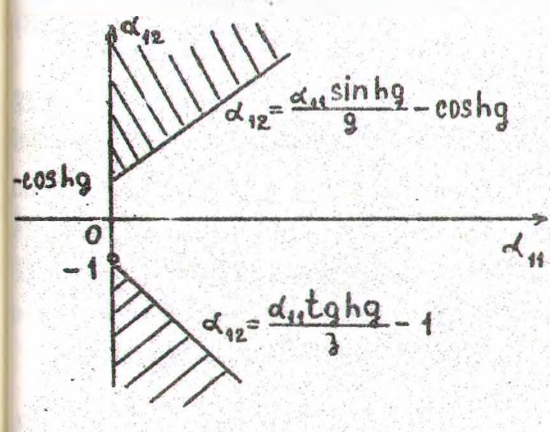


Рис.5

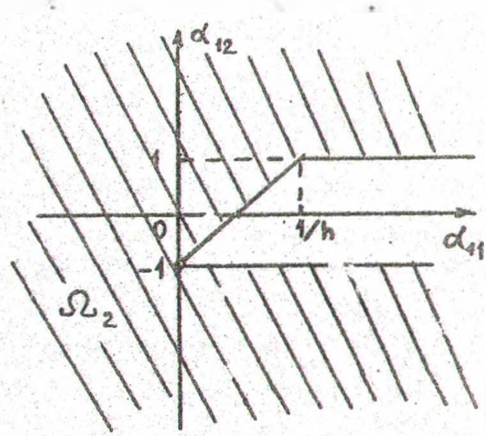


Рис.6

стабилизируемости системы (1), (4) регулятором (3) (см.рис.6). Это открытая область, ограниченная линиями: $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{11}h - 1$.

*Теорема 3.* Пусть $\det[b, A_1 b] \neq 0$. Тогда система (1), (4) стабилизируема регулятором (3), если точка $(a_{11}, a_{12})$ принадлежит области $\Omega_2$. При $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{11} \geq 0$ стабилизирующий регулятор может быть выбран как

$$u(t) = [-\alpha_{21} - \beta_1\alpha_{11} - \beta_2\alpha_{11} - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_1\beta_2\alpha_{12}, -\alpha_{22} - \alpha_{11} - \alpha_1 - \alpha_2]y(t)$$
$$+\left[r_{22}^1 - \beta_1\beta_2, r_{11}^1 - \beta_1 - \beta_2\right]y(t-h), \alpha_1 = -\frac{g\cos hg}{\sin hg}, \beta_1 = (\alpha_{11} + \alpha_1)/\alpha_{12} \qquad (20)$$

$(\alpha_2, \beta_2) \in \Omega$, g выбирается из условия (17).

В случае $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \notin \Omega_2$ вопрос о стабилизируемости системы (1), (4), (15) остается открытым. Но если $\exp(-\alpha_{11}h) + \alpha_{12} \neq 0$ при $\alpha_{11} \geq 0$, то существует интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. Ниже мы предлагаем простой путь построения такого регулятора, не требующий определения собственных векторов системы (в отличие от хорошо известного метода Красовского и Осипова [1, 2]).

Итак, рассмотрим систему (1), (4)

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \qquad (21)$$

и линейную интегральную обратную связь

$$v(t) = \int_{-h}^{0} dQ(s)\, y(t+s), \quad t > 0, \qquad (22)$$

или в операторной форме

$$v(t) = \int_{-h}^{0} \exp(ps)\, dQ(s)\, y(t) \underset{\text{def}}{=} [\eta_1(\exp(-p)), \eta_2(\exp(-p))]\, y(t), t > 0. \qquad (23)$$

В силу теоремы Винера-Пэли с учетом вида регулятора (22) функции $\eta_1$ и $\eta_2$ достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к exp(-ph) и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим регулятор вида (22).

Потребуем, чтобы для характеристического квазиполинома системы (21), замкнутой регулятором (22), имело место соотношение

$$\det\begin{bmatrix} p - \alpha_{11} & -\alpha_{12} - \exp(-ph) \\ -\eta_1(\exp(-p)) & p - \eta_2(\exp(-p)) \end{bmatrix} \equiv p^2 + r_1 p + r_2, \; p \in C,$$

где $-p^2 + r_1 p + r_2$ произвольный устойчивый полином $(r_1 \in R, r_2 \in R)$.
В результате $\eta_2(\exp(-p)) =$

$$= -\left(r_1 + \alpha_{11}\right) + \frac{\alpha_{11}\left(r_1 + \alpha_{11}\right) + r_2 + \eta_1\left(\exp(-p)\right)\left(\alpha_{12} + \exp(-ph)\right)}{\alpha_{11} - p}.$$

Выберем $\eta_1$ (exp(-p)) так, чтобы удовлетворить уравнению

$$\alpha_{11}\left(r_1 + \alpha_{11}\right) + r_2 + \eta_1\left(\exp(-\alpha_{11})\right)\left(\alpha_{12} + \exp(-\alpha_{11}h)\right) = 0,$$

откуда $\eta_1(\exp(-\alpha_{11})) = = \dfrac{-\alpha_{11}r_1 - \alpha_{11} - r_2}{\alpha_{12} + \exp(-\alpha_{11}h)} \underset{\text{def}}{=} \eta_1^*$

$\left(\alpha_{12} + \exp(-\alpha_{11}h\right) \neq 0$ в силу (5)). Полагая $\eta_1\left(\exp(-p)\right) \equiv \eta_1^*$, имеем

$$\eta_2\left(\exp(-p)\right) == -\left(r_1 + \alpha_{11}\right) + \frac{\eta_2^* + \eta_1^* \exp(-ph)}{\alpha_{11} - p},$$

где $\eta_2^* = \exp(-\alpha_{11}h)\left(\alpha_{11}r_1 + \alpha_{11}^2 + r_2\right) / \left(\alpha_{12} + \exp(-\alpha_{11}h)\right)$.

Возвращаясь к оригиналам, получаем

$$\frac{\eta_2^* + \eta_1^* \exp(-ph)}{\alpha_{11} - p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{==}} \begin{cases} -\eta_2^* \exp(\alpha_{11}t),\ t \in [0, h], \\ 0,\ t > h, \end{cases} \underset{\text{def}}{=} q_2(t),$$

$$\frac{\eta_2^* + \eta_1^* \exp(-ph)}{\alpha_{11} - p} y_2(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{==}} \int_0^t q_2(\tau) y_2(t - \tau) d\tau = \int_0^h \hat{q}_2(\tau) y_2(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-h}^{0} \hat{q}_2(-\mu) y_2(t + \mu)\, d\mu, \quad \text{где } \hat{q}_2(\tau) = \begin{cases} q_2(\tau),\ \tau \leq \max(t, h), \\ 0,\ \tau > \max(t, h). \end{cases}$$

В результате получаем стабилизирующий регулятор в виде

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11}r_1 - \alpha_{11}^2 - r_2}{\alpha_2 + \exp(-\alpha_{11}h)} y_1(t) - (r_1 + \alpha_{11}) y_2(t) + \int_{-h}^{0} \hat{q}_2(-\mu) y(t + \mu) d\mu.$$

**3.** *Пример*. Рассмотрим систему [1]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} x(t - 1) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \xi(t), \tag{24}$$

где a, d, $b_1$, $b_2$ -постоянные параметры, $\xi(\cdot)$- постоянное управление. При $b_1$=0 система (23) сводится к системе (6) с $\alpha_{11} = 0, \alpha_{11}^1 = -\dfrac{\pi}{2}$ (см. теорему 1). Точка $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \notin \Omega$. Поэтому система не стабилизируема. Пусть теперь $db_1 + \dfrac{\pi}{2} b_2 = 0,\ b_1 \neq 0,\ a \neq 0$. Тогда (по теореме 2) система стабилизируема регулятором (3). Регулятор выбирается как

$$u(t) = \left[-\alpha\lambda_0, -\alpha - \lambda_0\right] y(t) + \left[0, \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{2}\right] y(t - h),$$

где $\alpha$ и $\lambda_0$ -произвольные положительные действительные числа.

В случае $b_1 \neq 0$, $db_1 + \frac{\pi}{2} b_2 \neq 0$ система (23) сводится к системе:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{b_1 a}{db_1 + \frac{\pi}{2} b_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

Условие стабилизируемости (см.теорему 3) таково:

$b_1(a + d) + + \frac{\pi}{2} b_2 \neq 0$. Если оно выполнено, то стабилизирующий регулятор (3) может быть построен следующим образом: если $a = 0$, то $u(t)=\left[-\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, -\alpha_1 - \alpha_2\right]y(t) + \left[-\beta_1\beta_2, -\beta_1 - \beta_2 + \frac{\pi}{2}\right]y(t-h)$,

где $(\alpha_i, \beta_i) \in \Omega$, $i = 1,2$; в случае $a \neq 0$ выбираем параметр $g$ таким образом, чтобы

а) $g \in \left]\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right[$, $\cos hy < -\alpha_{12}$ при $ba_1 / \left(db_1 + \frac{\pi}{2} b_2\right) < -1$;

б) $g \in \left]0, \frac{\pi}{2h}\right[$, $\cos hy < -\alpha_{12}$ при $-1 < ba_1 / \left(db_1 + \frac{\pi}{2} b_2\right) < 0$;

в) $g \in \left]\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right[$, $\cos hg > -\alpha_{12}$ при $ba_1 / \left(db_1 + \frac{\pi}{2} b_2\right) > 0$.

После этого искомый регулятор ищется в виде (20).

Таким образом, система может быть стабилизирована разностным регулятором, тогда как в работе [1] предложен интегральный.

4. *Заключительные замечания.* В работе на примере двумерных систем представлены конструктивные алгоритмы построения разностного регулятора, в основу которых положены достаточные условия стабилизации. В случае, когда вопрос о разрешимости задачи стабилизации остается открытым, предложен эффективный путь построения интегрального регулятора, при этом бесконечномерная, вообще говоря, задача построения такого регулятора сводится к конечномерной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.-1963.- N 6, С.3-15.
2. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием//Дифференц.уравнения.-1965.- N 5, С.606-618.

3. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Управление спектром систем с запаздыванием//Автоматика и телемеханика.-1976.-N 7, С.5-14.
4. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems//Automatica.-1976.-N 5, C.529-531.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Спец.курс. - М.: Физматгиз, 1960.
6. Габелая А.Г., Иваненко В.И., Одарич О.Н. Стабилизируемость линейных автономных систем с запаздыванием//Автоматика и телемеханика. 1976.-N 8, С.12-16.
7. Эльсгольц Л.Е., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М.: Наука, 1971.