УДК 519

А.В. Овсянников, доцент

СТАТИСТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В СВЕРХРЕГУЛЯРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Statistical inequalities in conditions of regular statistical experiment are considered. It is shown, that at an amplification of regularity conditions (superregular) can be obtained a system of inequalities which is generalization of an inequality of Cramer. The obtained system expands theoretical base for a determination of qualitative limiting performances of the arbitrary moments of errors of estimations. It is marked, that definition moment a value of estimations of errors of the higher orders allows taking into account no Gaussian the form of an error distribution.

Одной из распространенных задач статистики и ее технических приложений, использующих статистическую обработку данных, является задача оценивания информационных параметров по результатам наблюдения. Важный элемент этой задачи – оценка качества получаемых результатов как с точки зрения сравнения методов и алгоритмов оценивания, так и в целях нахождения предельных, «неулучшаемых» оценок.

В этой связи значительные достижения теории оценивания связаны с понятиями состоятельности, эффективности, достаточности. Возможности использования теории достаточных статистик для отыскания несмещенных оценок с минимальной дисперсией восходят к работам Фреше (1943), Крамера, Сэвиджа (1946), Рао (1945), Колмогорова (1950) и др. Обширная библиография, посвященная этому вопросу, приведена, например, в [1, 2].

В условиях регулярного статистического эксперимента известны статистические неравенства Крамера – Рао – Фреше, Бхаттачария, Чепмена – Роббинса, Баранкина – Кифера и др., среди которых наиболее ясный физический смысл имеет первое; с помощью его можно определить нижнюю границу среднеквадратичной ошибки оценки параметра.

Рассмотрим статистический эксперимент, характеризуемый произвольным кортежем (вероятностным пространством) $\mathcal{E}=\{\mathcal{R},\mathcal{U},\mathcal{P}\}$, где $\{\mathcal{R}\cdot\mathcal{U}\}$ – измеримое пространство (пространство значений); $\mathcal{R}$ – множество событий, которое можно наблюдать в стохастическом эксперименте; $\mathcal{U}$ – алгебра событий (σ-алгебра), $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ – параметризированное семейство распределений (вероятностная мера).

Цель статьи состоит в том, чтобы показать, что при некотором усилении условий регулярности неравенство Крамера – Рао – Фреше допускает обобобщение на случай оценок моментов произвольных порядков

Будем рассматривать задачу оценивания скалярного параметра в условиях регулярного статистического эксперимента, для которого предполагается, что

1. $P_\vartheta=P(\mathbf{r}\,|\,\vartheta)$ – непрерывная функция на $\boldsymbol{r}$;
2. $\dfrac{\partial P(\mathbf{r}\,|\,\vartheta)}{\partial\vartheta}$ – существует и непрерывная функция на $\mathbf{r}$;
3. $I_{\text{ф},\,n}=\mathrm{M}\left\{\left[\dfrac{l}{P_\vartheta}\dfrac{\partial P_\vartheta}{\partial\vartheta}\right]^2\right\}$ – информация Фишера существует и является конечной.

Пусть имеется однородная независимая выборка $\mathbf{r}=\{r_1,\ldots,r_n\}$ наблюдаемых данных, принадлежащая распределению с плотностью $P_\vartheta=P(\mathbf{r}\,|\,\vartheta)$, где $\vartheta\in\Theta$ и Θ – интервал на действительной оси. При фиксированном объеме выборки $\boldsymbol{r}$ выборочным пространством является n-мерное евклидово пространство $\mathbf{R}=R^n$, на котором задана плотность P_ϑ, $\mathbf{r}\in\mathbf{R}$.

Усилим стандартные условия регулярности следующими условиями:

1. $P_\vartheta^{(i)}=\dfrac{\partial^i P(\mathbf{r}\,|\,\vartheta)}{\partial\vartheta^i}$ существует $\forall$ $i=0,\ldots,m$.
2. $I_{i,n}=M\left\{\left[P_\vartheta^{(i)}/P_\vartheta\right]^2\right\}$ существует и конечно $\forall$ $i=0,\ldots,m$, $M\{\}$ – символ математического ожидания.

Заметим, для однородной независимой выборки при $i=1$ величина $I_{1,n}$ является информационным количеством Фишера (информация по Фишеру о параметре ϑ), которая определяется формулой $I_{1,n}=nI_{1,1}$, где обозначено $I_{1,1}=M\left\{\left[\partial lnP_\vartheta/\partial\vartheta\right]^2\right\}$.

Введем обозначение $\Delta\vartheta=\vartheta^*-\vartheta$, где $\vartheta^*=G_\vartheta(\boldsymbol{r})$ – оценка неизвестного параметра по результатам наблюдений вектора $\mathbf{r}$.

Рассмотрим функцию смещения, которую определим как

$$F_i(\vartheta)=\int_{\mathbf{R}}\Delta\vartheta^i P_\vartheta d\mathbf{r},\quad F_0(\vartheta)=\int_{\mathbf{R}}P_\vartheta d\mathbf{r}=1. \qquad (1)$$

Продифференцировав функцию смещения по параметру ϑ i раз, получим

$$F_i^{(i)} = \partial^i F_i(\vartheta)/\partial\vartheta^i = \sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \int_{\mathbf{R}} \Delta\vartheta^j P_\vartheta^{(j)} d\mathbf{r}, \quad i=0,...m. \quad (2)$$

Коэффициенты $a_{i,j}$, как можно показать методом индукции, определяются системой рекуррентных выражений:

$$\begin{cases} a_{i,j} = 0, \ \forall i<j, \\ a_{i,j} = 1, \ \forall i=j, \ i,j=0,...,m, \\ a_{i,0} = (-1)^{-i} i!, \ \forall i,j=1,...,m, \\ a_{i,j} = \dfrac{i}{j!}\left[a_{i-1,j-1}(j-1)! - a_{i-1,j} j!\right], \forall i=1,...,m, \ j=1,..,i. \end{cases} \quad (3)$$

Коэффициенты $a_{i,j}$ образуют нижнюю треугольную матрицу A размером $m\times m$. Пример матрицы A размерностью 5×5 приведен ниже:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 18 & -9 & 1 & 0 \\ 24 & -96 & 72 & -16 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица A обладает следующим свойством: обратная к матрице A матрица A^{-1} состоит из элементов $|a_{i,j}|$, т. е

$$\left[a_{i,j}\right]^{-1} = \left[|a_{i,j}|\right] \ \forall i,j=1,...,m.$$

Для приведенной в качестве примера матрицы A получим

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся указанным свойством матрицы A для решения системы линейных уравнений (2). С учетом векторно-матричного представления (2) получим

$$\int_{\mathbf{R}} \Delta\vartheta^i P_\vartheta^{(i)} d\mathbf{r} = \sum_{j=0}^{i} |a_{i,j}| F_j^{(j)}, \quad i=0,...,m. \quad (4)$$

Преобразуем левую часть (4). Умножим и разделим подынтегральное выражение (4) на величину $P(\mathbf{r}|\vartheta)$, возведем в квадрат и воспользуемся неравенством Коши – Буняковского – Шварца как частным случаем общего неравенства Гельдера [3]:

$$\left[\int_{\mathbf{R}} \Delta\vartheta^i \left[P_\vartheta\right]^{\frac{1}{2}} P_\vartheta^{(i)} \left[P_\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}} d\mathbf{r}\right]^2 \le$$
$$\le \int_{\mathbf{R}} \Delta\vartheta^{2i} P_\vartheta \, d\mathbf{r} \int_{\mathbf{R}} \left[P_\vartheta^{(i)}/P_\vartheta\right]^2 P_\vartheta \, d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Таким образом, окончательно получим неравенство

$$\left[\sum_{j=0}^{i} |a_{i,j}| F_j^{(j)}\right]^2 \le$$
$$\le M\left\{\Delta\vartheta^{2i}\right\} M\left\{\left[P_\vartheta^{(i)}/P_\vartheta\right]^2\right\}, \quad i=0,...m. \quad (6)$$

В случае i=1 из выражения (6) непосредственно следует неравенство Крамера – Рао – Фреше. При i=2 из (6) следует

$$\left[2+4F_1^{(1)} + F_2^{(2)}\right]^2 \le M\left\{\Delta\vartheta^4\right\} M\left\{\left[P_\vartheta^{(2)}/P_\vartheta\right]^2\right\}, \quad (7)$$

а в случае i=3

$$\left[6+18F_1^{(1)} + 9F_2^{(2)} + F_3^{(3)}\right]^2 \le$$
$$\le M\left\{\Delta\vartheta^6\right\} M\left\{\left[P_\vartheta^{(3)}/P_\vartheta\right]^2\right\}. \quad (8)$$

Параметр $I_{i,n}$ можно определить как информацию по Фишеру порядка i относительно оцениваемого параметра ϑ. Величины $M\left\{\Delta\vartheta^{2i}\right\}$ характеризуют четные параметры формы, плотности распределения вероятности $P_\vartheta(\Delta\vartheta)$ ошибки оценки параметра ϑ. Заметим, что классическое неравенство Крамера – Рао – Фреше определяет лишь нижнюю границу среднеквадратических ошибок оценок. Коэффициенты $I_{2,1}$, $I_{3,1}$ в сравнении с $I_{1,1}$ для некоторых типовых распределений приведены в таблице.

Для несмещенных оценок из выражения (6) получаем

$$M\left\{\Delta\vartheta^{2i}\right\} \ge i!^2 M\left\{\left[P_\vartheta^{(i)}/P_\vartheta\right]^2\right\}^{-1}. \quad (9)$$

В случае наличия n данных наблюдений и однородной независимой выборки при i=2 из неравенства (9) следует формула

$$M\left\{\Delta\vartheta^4\right\} \ge 4(nI_{2,1} + 2n(n-1)I_{1,1}^2)^{-1}. \quad (10)$$

Коэффициенты правой части неравенства (10) приведены в нижней строке таблицы. Для оценок с заданным смещением эффективная оценка удовлетворяет равенству в формуле (6), а для несмещенных – в формуле (9). Знак равенства в выражении (6) или в частных случаях (7) и (8) для соответствующих индексов i на основании неравенства Гельдера обеспечивается при условии

$$P_\vartheta^{(i)}/P_\vartheta = K_i(r,\vartheta)\Delta\vartheta^i, \quad (11)$$

где $K_i(r,\vartheta)$ – функция, не зависящая от ϑ^*, но может зависеть от ϑ и r.

Таблица

Информационные количества Фишера для различных распределений

Распределение	$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}/\sqrt{2\pi\sigma}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$s(s^2+x^2)^{-1}/\pi$	$\alpha Sech^2(\alpha x)/2$
$I_{1,1}$	σ^{-2}	λ^2	$2s^{-2}$	$4\alpha^2/3$
$I_{2,1}$	$2\sigma^{-4}$	λ^4	s^{-4}	$16\alpha^4/5$
$I_{3,1}$	$6\sigma^{-6}$	λ^6	$27s^{-6}/4$	$1472\alpha^6/105$
$M\left\{\Delta\vartheta^4\right\}$	$2\sigma^4/n^2$	$4/\lambda(2n-1)n$	$8s^4/n(n-1)$	$45/4\alpha^4 n(10n-1)$

В качестве примера рассмотрим случай i=2, когда из (11) следует

$$P_\vartheta^{(2)}/P_\vartheta = K_2(r,\vartheta)\Delta\vartheta^2 . \qquad (12)$$

Пусть $K_2(r,\vartheta)=K_2=\mathrm{const}$. Решение дифференциального уравнения (12) дает распределение, содержащее линейную комбинацию вырожденной гипергеометрической функции, соответствующей дифференциальному уравнению вырожденной гипергеометрической функции Куммера и многочлена Эрмита [4]:

$$P_\vartheta(i=2)=C_1 e^{\sqrt{k}(\vartheta^*\vartheta-\frac{\vartheta^{*2}}{2})} H_{-\frac{1}{2}}(k^{\frac{1}{4}}\Delta\vartheta)+$$

$$+C_2 e^{\sqrt{k}\frac{\vartheta^{*2}}{2}} {}_0F_1(\frac{3}{4},\frac{k}{16}\Delta\vartheta^4).$$

Константы C_1 и C_2 определяются из заданных начальных и граничных условий, накладываемых на распределение P_ϑ.

Введем в рассмотрение безразмерные кумулянтные коэффициенты $\gamma_n=\chi_n/\sigma^n$, где χ_n – кумулянты. В частности, $\gamma_1=\chi_1/\sigma=m/\sigma$, m – символ математического ожидания; γ_2=1, γ_3 – коэффициент асимметрии; γ_4 – коэффициент эксцесса.

Как известно, отличие кумулянтов при n >2 от нуля свидетельствует о существенной негауссовости распределения ошибки оценки. Следовательно, использование алгоритма оценивания содержащего только два уравнения для среднего и дисперсии становиться неэффективным и требуется дополнять алгоритм оценивания уравнениями для высших кумулянтов.

Таким образом, во-первых, получена система статистических неравенств для случая усиленных условий регулярности (сверхрегулярности) статистического эксперимента, что является обобщением неравенства Крамера – Рао – Фреше. Во-вторых, рассматриваемая система расширяет теоретическую базу для нахождения качественных предельных характеристик произвольных моментов ошибок оценок (в частности, коэффициента эксцесса). В-третьих, определение моментных значений оценок ошибок высших порядков позволяет рассматривать негауссовскую форму распределения ошибок и, соответственно, получать более качественные оценки за счет включения в алгоритмы оценивания уравнений кумулянтов высших порядков, например кумулянтов третьего и четвертого порядков.

Литература

1. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. Маршалл А., Олкин. И. Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 576 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Пер с англ. – М.: Наука, 1973. – 831 с.