УДК 517.977.1

В.М.Марченко, профессор;
А.А.Якименко, аспирант

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

The necessary and sufficient conditions of stability for equation $\dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2(t-h) + a_3\dot{x}(t-h) = 0$ are given.

1. ***Введение.*** Изучение вопроса устойчивости функциональных дифференциально - разностных уравнений является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений. Достаточно общие результаты были получены в работах [1,2]. В случае линейных дифференциально - разностных уравнений первого порядка нейтрального типа с одним запаздыванием было показано [3,5], что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости является отрицательность действительных частей всех корней соответствующего характеристического квазиполинома. Таким образом, задача исследования устойчивости исходного уравнения сводится к изучению распределения корней его характеристического квазиполинома.

2. ***Постановка задачи и основные результаты.*** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2(t-h) + a_3\dot{x}(t-h) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $h, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}, h > 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$f(\lambda) \stackrel{def}{=} \lambda + a_1 + a_2e^{-\lambda h} + a_3\lambda e^{-\lambda h} = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Все простые корни уравнения (2) могут быть выбран как непрерывные функции коэффициентов a_1, a_2, a_3.*

<u>Доказательство.</u> Действительно, полагая $\lambda \stackrel{def}{=} x + iy$— простой корень уравнения (2), для нахождения $x = x(a_1, a_2, a_3)$, $y = y(a_1, a_2, a_3)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} Ref(\lambda) = x + a_1 + a_2e^{-xh}\cos yh + a_3xe^{-xh}\cos yh + a_3ye^{-xh}\sin yh = 0, \\ Imf(\lambda) = y - a_2e^{-xh}\sin yh - a_3xe^{-xh}\sin yh + a_3ye^{-xh}\cos yh = 0, \end{cases} \tag{3}$$

при условии

$$0 \neq \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial x}. \tag{4}$$

Используя условия Коши-Римана

$$\frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial x} = \frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial y}, \frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial y} = -\frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial x},$$

заключаем, что якобиан системы (3)

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial x} & \frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial x} & \frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial Ref(x+\mathrm{i}y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Imf(x+\mathrm{i}y)}{\partial x}\right)^2$$

в силу (4) отличен от нуля, что на основании теоремы о неявной функции гарантирует непрерывность простых корней $\lambda = \lambda(a_1, a_2, a_3) = x(a_1, a_2, a_3) + +\mathrm{i}y(a_1, a_2, a_3)$ в каждой точке $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Все кратные корни уравнения (2) действительны.*

Доказательство. Для кратного корня λ уравнения (2) имеем

$$f'_\lambda(\lambda) = 1 - a_2he^{-\lambda h} + a_3(1-\lambda h)e^{-\lambda h} = 0. \tag{5}$$

Выражая a_2 из уравнения (5), получаем

$$a_2 = -a_3\lambda + \frac{a_3 + e^{\lambda h}}{h}; \tag{6}$$

из уравнения (2) с учетом (6) находим a_1:

$$a_1 = -\lambda - \frac{1 + a_3e^{\lambda h}}{h}. \tag{7}$$

Отсюда, полагая $\lambda = x + \mathrm{i}y$ и приравнивая мнимые части выражений в (6), (7), получаем

$$\begin{cases} 0 = -a_3yh + e^{xh}\sin yh, \\ 0 = -yh + a_3e^{-xh}\sin yh, \end{cases}$$

откуда $y^2h^2 = \sin^2 yh$, что возможно лишь при $y = 0$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При фиксированном $a_3 \in \mathbf{R}, |a_3| \leq 1$, неотрицательные действительные корни уравнения (2) могут лежать, разве лишь,* *вне открытой области, ограниченной снизу прямой* $a_2 = -a_1$ *и слева — прямой* $a_1 = -\dfrac{1+a_3}{h}$ *в пространстве коэффициентов* a_1, a_2 (см. рис.1)

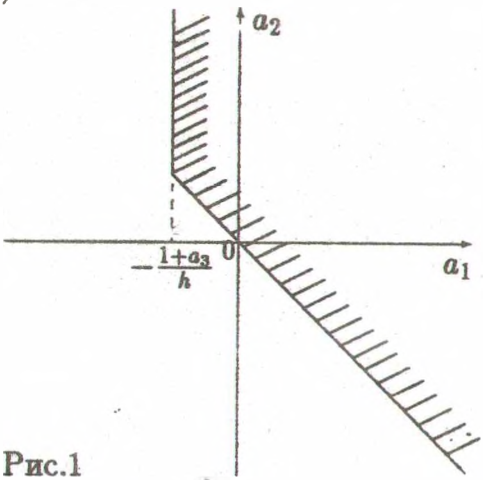

Рис.1

Доказательство. Рассмотрим область $a_2 > -a_1$ или, выражая a_2 из уравнения (2), имеем $-\lambda e^{\lambda h} - a_1 e^{\lambda h} - a_3\lambda > -a_1$, что равносильно

$$a_1(e^{\lambda h} - 1) < -\lambda(a_3 + e^{\lambda h}),$$

откуда, учитывая, что $e^{\lambda h} - 1 > 0$ при $\lambda > 0$, получаем

$$a_1 < -\frac{\lambda(a_3 + e^{\lambda h})}{e^{\lambda h} - 1} \tag{8}$$

Имеем:

$$a_1 - \left(-\frac{1+a_3}{h}\right) < -\frac{\lambda(a_3 + e^{\lambda h})}{e^{\lambda h} - 1} + \frac{1+a_3}{h} = \frac{(1+a_3)(e^{\lambda h} - 1) - h\lambda(a_3 + e^{\lambda h})}{h(e^{\lambda h} - 1)} =$$

$$= \frac{1}{h(e^{\lambda h} - 1)}\left((1+a_3)(e^{\lambda h} - 1 - h\lambda) - h\lambda(e^{\lambda h} - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{h(e^{\lambda h} - 1)}\left(\left(\frac{1+a_3}{2!} - 1\right)(\lambda h)^2 + \cdots + \left(\frac{1+a_3}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)(\lambda h)^n + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{h(e^{\lambda h} - 1)}\left(-\frac{1-a_3}{2}(\lambda h)^2 - \cdots - \left(\frac{n - a_3 - 1}{n!}\right)(\lambda h)^n - \cdots\right) < 0 \quad \text{при}$$

Следовательно, при $a_2 > -a_1$, $a_1 > -\dfrac{1+a_3}{h}$, $|a_3| \le 1$ уравнение (2) не имеет положительных действительных корней. Если теперь предположить, что $\lambda = 0$, то в силу (2) получаем $a_2 = -a_1$, что соответствует границе нашей области.

Лемма 3 полностью доказана.

Теорема 1. *Уравнение (2) не имеет корней с неотрицательными действительными частями в том и только в том случае, когда* $|a_3| \leq 1$ *и точка* (a_1, a_2) *принадлежит открытой области* U_0^* *в плоскости коэффициентов* (a_1, a_2), *которая определяется следующими условиями:*

1) граница области U_0^* *описывается системой*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cos yh + a_3 y \sin yh = 0 \\ y - a_2 \sin yh + a_3 y \cos yh = 0 \end{cases}, \quad y \in [0, \frac{\pi}{h}], \quad h > 0;$$

2) область U_0^* *содержит луч* $a_1 > 0, \quad a_2 = 0.$

Доказательство. Воспользуемся методом D–разбиений [1]. Кратко его суть такова.

В силу лемм 1, 2 комплексные корни уравнения (2) можно рассматривать как непрерывные функции параметров a_1, a_2, a_3. Тогда пространство коэффициентов разбивается на области гиперповерхностями, точками которых служат коэффициенты квазиполиномов, имеющих хотя бы один корень на мнимой оси.

Ясно, что точкам каждой области (например, U_k) этого разбиения соответствуют квазиполиномы с одинаковым числом (в данном случае k) комплексных корней с положительной действительной частью. Такое разбиение принято называть D–разбиением.

Нас интересует область U_0^*, где отсутствуют комплексные корни с положительной действительной частью и положительные действительные корни. Очевидно, что $U_0^* \subseteq U_0$.

Возьмем произвольный корень $\lambda = \lambda(a_1, a_2, a_3) = x + iy$ уравнения (2). Тогда выполняется: $f(\lambda(a_1, a_2, a_3)) \equiv 0$

или, дифференцируя,

$$0 \equiv df(\lambda(a_1, a_2, a_3)) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial a_j} da_j,$$

откуда вычисляем дифференциал действительной части корня:

$$dx = -Re \frac{\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial a_j} da_j}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} \tag{9}$$

Рассматривая dx на границе разбиения, выясняем, увеличивается ($dx > 0$) или уменьшается ($dx < 0$) число корней с положительной действительной частью при переходе из одной области D–разбиения в другую (причем их число изменяется при $dx \neq 0$ ровно на количество мнимых корней, которые соответствуют данной точке границы). В результате определяем область U_0 (или убеждаемся в ее отсутствии). Для описания области U_0^* достаточно убедиться в отсутствии в области U_0 неотрицательных действительных корней (в силу $U_0^* \subseteq U_0$).

Полагая в (2) $\lambda = \mathbf{i}y, \quad y \in \mathbf{R}$, получаем:

$$\mathbf{i}y + a_1 + a_2 e^{-\mathbf{i}yh} + a_3 \mathbf{i}y e^{-\mathbf{i}yh} = 0,$$

что в пространстве параметров a_1, a_2, a_3 определяет семейство множеств (в общем случае поверхностей), соответствующих квазиполиномам, имеющим хотя бы один мнимый корень:

$$L_*: \quad a_1 + a_2 = 0 \quad (\text{при} \quad y = 0),$$

$$L_k: \begin{cases} a_1 + a_2 \cos yh + a_3 y \sin yh = 0 \\ y - a_2 \sin yh + a_3 y \cos yh = 0 \end{cases}, \quad y \in \left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right), \quad k \in \mathbf{Z} \tag{10}$$

$$L^*: \quad a_1 - a_2 = 0 \quad (\text{при} \quad a_3 = 1 \quad \text{и} \quad y = (2k+1)\frac{\pi}{h}).$$

Сделаем сечение семейства (10) плоскостью $a_3 = const$ при $|a_3| < 1$ и рассмотрим полученное семейство кривых(см. рис. 2):

$$L_k: \begin{cases} a_1 = -\frac{y}{\sin yh}(\cos yh + a_3) \\ a_2 = \frac{y}{\sin yh}(1 + a_3 \cos yh) \end{cases}, \quad y \in \left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right), \quad k \in \mathbf{Z} \tag{11}$$

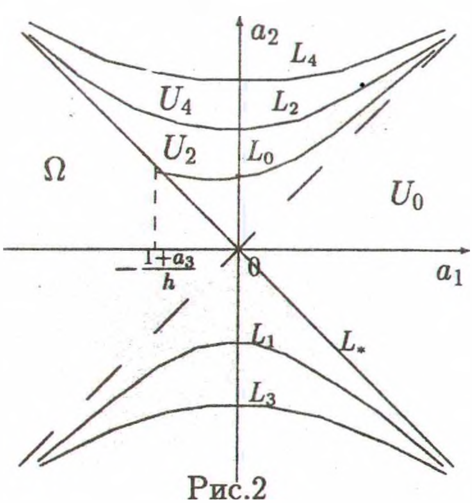

Рис.2

Определим область U_0, для чего рассмотрим луч $a_2 = a_3 a_1, \quad a_1 > 0$ на котором (2) преобразуется следующим образом:

$$0 = \lambda + a_1 + a_3 a_1 e^{-\lambda h} + a_3 \lambda e^{-\lambda h} = (\lambda + a_1)(1 + a_3 e^{-\lambda h}), \tag{12}$$

откуда заключаем, что на этом луче квазиполиномы имеют корни только с отрицательной действительной частью. Стало быть, область, содержащая луч $a_2 = a_3 a_1$, $a_1 > 0$, и ограниченная линиями L_* и L_0, включается в U_0.

Рассмотрим теперь область $\Omega = \{(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 | a_2 < -a_1\}$. Здесь

$$f(0) = a_1 + a_2 < 0, \text{а} \lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty.$$

В силу теоремы о среднем значении заключаем, что в этой области найдется по крайней мере один положительный действительный корень уравнения (2) при любом $a_3 \in \mathbf{R}$. Следовательно, область Ω не включается в U_0^*.

Вычисляя дифференциал (9) действительной части корня в точках пересечения луча $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ с линиями L_k, получаем

$$dx = \frac{a_2 h}{(\sin y_k h - a_3 y_k h)^2 + (a_2 h)^2} da_2, \tag{13}$$

где y_k – решение уравнения $a_1 = 0 = \cos yh + a_3 = 0$ (см. (11)), принадлежащее промежутку $\left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right)$. Так как в этих точках квазиполиномы имеют точно два мнимых корня $\lambda_j = \pm y_k \mathbf{i}$, $j = 1, 2$, то с учетом дифференциала (13) при движении в положительном направлении оси $0a_2$ $(dx > 0)$ заключаем, что область, ограниченная линиями L_{2k} и L_{2k-2},содержит $2k$ комплексных корней с положительной действительной частью (k=1,2,...) и, таким образом, не включается в U_0.

Предположим, что $|a_3| = 1$. В этом случае семейство (10) вырождается в линии: $a_2 = \pm a_1$.

В случае $a_3 = -1$ каждой точке луча $a_2 = -a_1$, $a_1 > 0$ соответствует квазиполином

$$\lambda + a_1 - a_1 e^{-\lambda h} - \lambda e^{-\lambda h} = (\lambda + a_1)(1 - e^{-\lambda h}).$$

Вычисляя дифференциал (9) на корнях $\lambda_k = 2k\frac{\pi}{h}\mathbf{i}$, $k \in \mathbf{Z}$, при переходе через луч $a_2 = -a_1$, $a_1 > 0$, вдоль прямой $a_2 = const < 0$, имеем:

$$dx = -\frac{a_1 h}{(a_1 h)^2 + (2k\pi)^2} da_1.$$

Следовательно, область $U = \{(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^{2\times 2}, a_1 > |a_2|\}$ включается в U_0.

Проводя аналогичные рассуждения в случае $a_3 = 1$, с той лишь разницей, что дифференциал (9) рассматривается при переходе через луч $a_2 = a_1, \quad a_1 > 0$, вдоль прямой $a_2 = const > 0$, убеждаемся, что область U включается в U_0.

Пусть теперь $|a_3| > 1$. Тогда соотношение (10) эквивалентно (11) и соответствующее семейство линий имеет следующий вид (см. рис. 3):

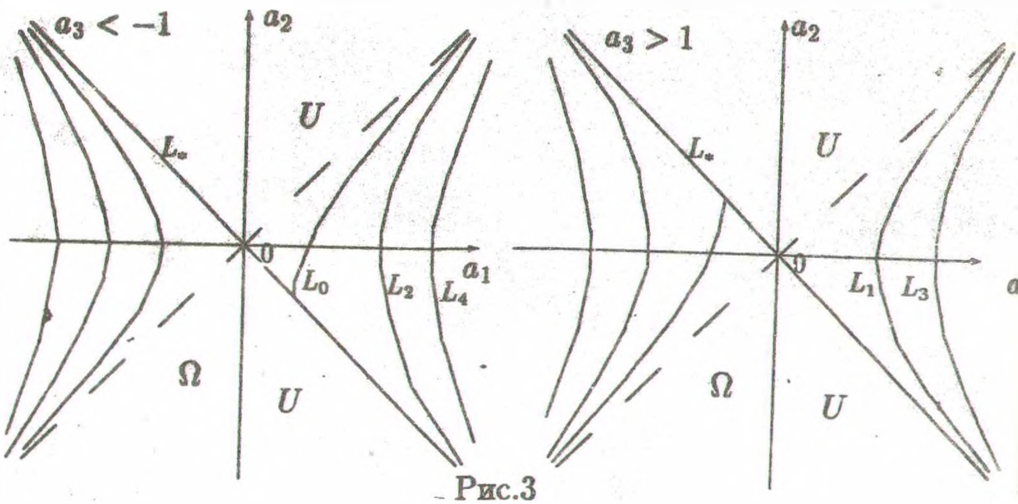

Рис.3

При $a_2 = a_3 a_1$ имеем бесконечное число корней уравнения (2) с положительной действительной частью (см. (12)). Поэтому область U из D -разбиения, содержащая прямую $a_2 = a_3 a_1$, включается в U_∞.

Рассмотрим поведение дифференциала действительной части корня вдоль луча $a_2 = 0, \quad a_1 > 0$, при пересечении линий L_k:

$$dx = -\frac{a_1 h}{(a_1 h)^2 + (y_k h - a_3 \sin y_k h)^2} da_1,$$

где y_k – корень уравнения $1 + a_3 \cos yh = 0$ (см. (11)), принадлежащий промежутку $\left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right)$

Поскольку при переходе через эти линии справа налево dx получает положительное приращение, то $U_0 = \oslash$. Действительно, предполагая противное: существует область $U_{k_0} \subset U_0$, ограниченная линиями L_{k_0} – L_{k_0+1}. Тогда, двигаясь по лучу $a_2 = 0, \quad a_1 > 0$, из области U_{k_0} в U, получим, что в области U число корней с положительной действительной частью конечно (равно $2k_0$), но, как было указано выше, $U \subset U_\infty$.

Учитывая лемму 3, заключаем, что область U_0^* совпадает с полученной нами в процессе доказательства теоремы областью U_0.

Теорема полностью доказана.

<u>*Замечание.*</u> Метод исследования позволяет определить не только область U_0, но и области $U_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Итак, учитывая [3,5], заключаем, что область U_0^* (описанная в теореме 1) является областью асимптотической устойчивости для уравнения (1) в пространстве параметров a_1, a_2, a_3, h.

Скорость стремления к нулю решений (1) зависит от величины параметра a_3. При $|a_3| < 1$ действительные части всех корней (2) в области U_0^* отграничены от нуля, что влечет стремление к нулю по экспоненциальному закону [5]. Действительно, в [2] было показано, что если расположить корни (2) в порядке возрастания их модулей, то действительные части этих корней стремятся к числу $d = \frac{1}{h}ln(|a_3|)$. Это значит, что существует конечное положительное число N такое, что все корни, по модулю большие N, будут иметь действительные части, лежащие на расстоянии не более, чем $|\frac{d}{2}|$ от точки d. В силу того, что в области U_0^* все корни (2) имеют отрицательные действительные части, а также учитывая, что $d < 0$ при $|a_3| < 1$, в качестве верхней границы для действительных частей корней (2) можно выбрать число $\alpha = max\{\frac{d}{2}, Re(\lambda_1), \cdots, Re(\lambda_m)\}$, где $|\lambda_i| < N, \quad i = 1, \ldots, m$. Отсюда вытекает [2], что $\alpha < 0$.

При $|a_3| = 1$ в работе [3] было показано, что для области коэффициентов U_0^* существуют решения уравнения (1), которые стремятся к нулю со скоростью не выше некоторой отрицательной степени t.

При $|a_3| < 1$ на границе области U_0^* появляется либо простой нулевой корень(за исключением точки $a_1 = -\frac{1+a_3}{h}, \quad a_2 = \frac{1+a_3}{h}$, где возникает кратный нулевой корень), либо пара простых комплексно-сопряженных корней, что влечет устойчивость решений по Ляпунову [1]. Очевидно, что в точке $a_1 = -\frac{1+a_3}{h}, \quad a_2 = \frac{1+a_3}{h}$ устойчивости нет(появляются неограниченные решения вида ct, где c – произвольная константа). В случае $|a_3| = 1$ в работе [4] показана устойчивость по Ляпунову решений уравнения (1) для коэффициентов, лежащих на лучах $a_2 = a_1, \quad a_1 > 0$ при $a_3 = 1$ и $a_2 = -a_1, \quad a_1 > 0$ при $a_3 = -1$ и неустойчивость — для коэффициентов, лежащих на лучах $a_2 = -a_1, \quad a_1 > 0$ при $a_3 = 1$ и $a_2 = a_1, \quad a_1 > 0$ при $a_3 = -1$. Путем непосредственных вычислений нетрудно убедиться, что при $a_3 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$ уравнение (1) устойчиво по Ляпунову, а при $a_3 = -1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$ — нет.

Таким образом, пусть $\overline{U_0^*}$ — область U_0^* вместе с теми (описанными выше) точками ее границы, которым соответствуют устойчивые по Ляпунову уравнения (1). Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 2 *Для того, чтобы уравнение (1) было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты принадлежали области $\overline{U_0^*}$. В области U_0^*(и только в ней) уравнение (1)* *асимптотически устойчиво.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Э.Эльсгольц, С.Б.Норкин. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* -М., 1971.

2. Р.Беллман, К.Кук. *Дифференциально - разностные уравнения.* -М., 1967.

3. П.С.Громова. *Устойчивость решений нелинейных уравнений нейтрального типа в асимптотически критическом случае*// Математические заметки.- 1967.- Т. 1, N 6,-С. 715—728.

4. П.С.Громова. *О неустойчивости решений линейных дифференциально - разностных уравнений первого порядка*// Труды сем. по теор. дифф. уравн. с откл. арг., Ун-т дружбы народов, VIII, 1972,-С. 27-36.

5. Hahn W. *Uber Differential-Differenzengleichungen mit anomalen Losungen*// Math. Annalen.-1957, Bd. 133, S.251-255.