УДК 539.384.4

С.А. Борисевич, ассистент, В.Б. Немцов, профессор

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ДЕРЕВЬЕВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ СНЕГА

Large nonlinear flexure of a tree stem is considered using the nonlinear differential equation of beam deflection.

У деревьев, произрастающих на открытой местности, часто наблюдается одностороннее развитие кроны. При больших осадках зимой сила тяжести снега вызывает потерю устойчивости ствола дерева, и он начинает деформироваться. В данной статье исследуются большие нелинейные прогибы ствола дерева с помощью нелинейного дифференциального уравнения изогнутой оси. При этом считается, что сила тяжести снега приведена к центру тяжести кроны.

Форму изогнутой оси ствола дерева можно определить при помощи выражения

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}, \qquad (1)$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна упругой линии ствола дерева в произвольном поперечном сечении; M – изгибающий момент в указанном сечении; E – модуль упругости первого рода (считаем, что пластические деформации отсутствуют); J – центральный момент инерции данного сечения относительно главной оси, перпендикулярной к плоскости изгиба.

В системе координат y, x

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+(\frac{dy}{dx})^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

Для наших целей удобно взять в качестве независимой переменной дуговую координату s. Это связано с тем, что ствол дерева имеет переменное по длине сечение и, следовательно, переменный момент инерции сечения ствола. Поэтому уравнение (1) записывается в другой форме. В отличие от уравнения (2), где угол, составляемый касательной к упругой линии, записывается в форме

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$$

для наших целей удобно его записать в следующем виде:

$$\theta=\arcsin\frac{dy}{ds}.$$

Тогда выражение для кривизны, определяемое формулой

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds},$$

запишется как

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-(\frac{dy}{ds})^2}}, \qquad (3)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение прогибов ствола дерева имеет вид

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\sqrt{1-(\frac{dy}{ds})^2}\,\frac{M}{EJ}, \qquad (4)$$

где s – длина дуги оси ствола, отсчитываемая от основания.

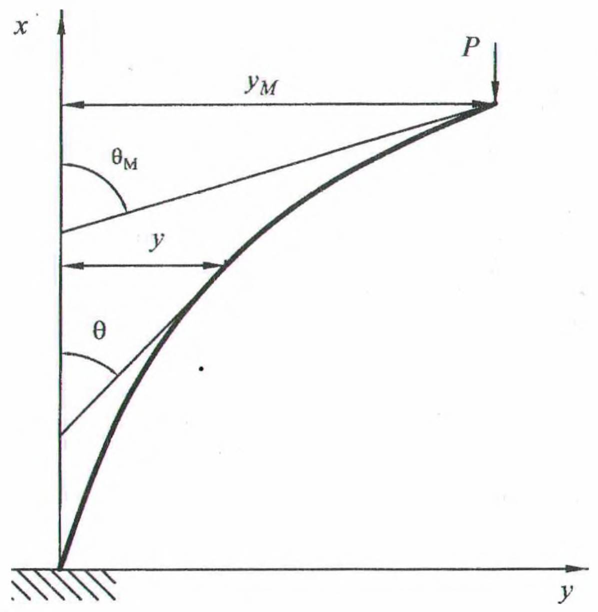

Рис. 1. Упругая линия оси ствола дерева

Будем считать, что диаметр ствола дерева меняется по линейному закону:

$$d=d_0-ks, \qquad (5)$$

где d_0 – диаметр ствола дерева у основания; k – коэффициент сбега ствола; s – дуговая координата, отсчитываемая от основания ствола. Тогда момент инерции сечения

$$J=\frac{\pi d^4}{64}$$

...пишется в виде

$$J = \frac{\pi\ d_0^4}{64}(1 - \frac{ks}{d_0})^4 \qquad (6)$$

или

$$J = J_0(1 - \frac{ks}{d_0})^4, \qquad (7)$$

где J_0 – момент инерции сечения у основания ствола.

Изгибающий момент в произвольном сечении находится как (рис. 1)

$$M = P(y_m - y), \qquad (8)$$

где P – продольная сила тяжести снега; y_m – максимальный прогиб свободного конца ствола. Модуль упругости будем считать постоянным по длине ствола. В итоге уравнение прогибов запишется как

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \sqrt{1 - (\frac{dy}{ds})^2}\,\frac{P(y_m - y)}{EJ_0(1 - \frac{ks}{d_0})^4}. \qquad (9)$$

Здесь и везде ниже учитываются только перемещения от изгиба; перемещения от продольных (нормальных) сил пренебрежимо малы.

Приведем уравнение к безразмерному виду, введя безразмерную дуговую координату $\xi = \frac{s}{l}$ и безразмерный прогиб $\eta = \frac{y}{l}$, где l – длина ствола дерева.

В этом случае

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{l}\frac{dy}{d\xi}, \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2 y}{ds^2}, \qquad (10)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{l}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}. \qquad (11)$$

Уравнение в безразмерной форме записываем как

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \sqrt{1 - (\frac{d\eta}{d\xi})^2}\,\frac{\pi\ \ (\eta_m - \eta)}{(1 - \alpha\ \xi)^4}, \qquad (12)$$

где $\pi = \frac{p\,l^2}{EJ_0}$ – безразмерная сила; $\alpha = \frac{k\,l}{d_0}$ – безразмерная величина, характеризующая сбег ствола.

В уравнение входит неизвестная величина η_m, зависящая от безразмерной силы π. Чтобы решить дифференциальное уравнение (12), необходимо сначала найти зависимость максимального прогиба от безразмерной силы. Для этого воспользуемся приближенным методом Бубнова – Галеркина. Будем представлять уравнение прогибов в координатных осях ξ и η в виде параболы:

$$\eta = a\xi^2 + b\xi + c. \qquad (13)$$

Используя граничные условия: при $\xi = 0$, $\eta = 0$ и $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, а при $\xi = 1$, $\eta = \eta_m$ получаем пробное уравнение упругой линии ствола в виде

$$\eta = \eta_m \xi^2. \qquad (14)$$

Запишем дифференциальное уравнение, описывающее изгиб ствола дерева в виде

$$D\{\eta\} = 0, \qquad (15)$$

где D – нелинейный дифференциальный оператор. Тогда правило Галеркина сводится к уравнению

$$\int_0^1 D\{\eta\}\eta\ d\xi = 0 \qquad (16)$$

или

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\,\frac{\pi(\eta_m - \eta)}{(1 - \alpha\xi)^4} \right) \eta_m \xi^2 d\xi = 0\ . \qquad (17)$$

Решая численно уравнение (17), получаем зависимость $\pi = \pi(\eta_m)$ для разных значений α.

Из графиков, представленных на рис. 2, видно, что после превышения критической нагрузки прогибы очень быстро нарастают.

При численном решении дифференциального уравнения (12) необходимо учесть, что под корнем в знаменателе появляется нуль, когда производная становится равной единице, что отвечает горизонтальному расположению касательной к оси ствола. Поэтому возникает необходимость область интегрирования разбить на два участка.

На первом участке численное решение уравнения (12) осуществляется при нулевых граничных условиях до точки, где производная $\frac{d\eta}{d\xi}$ равна нулю. Затем уравнение (12) решается на втором участке при граничных условиях, определяемых конечным состоянием на первом участке. Для большей наглядности строим график решения в осях η и x, переход к x осуществляется по следующей формуле:

$$x = \int_0^x \sqrt{1 - (\frac{d\eta}{d\xi})^2}\,dx. \qquad (18)$$

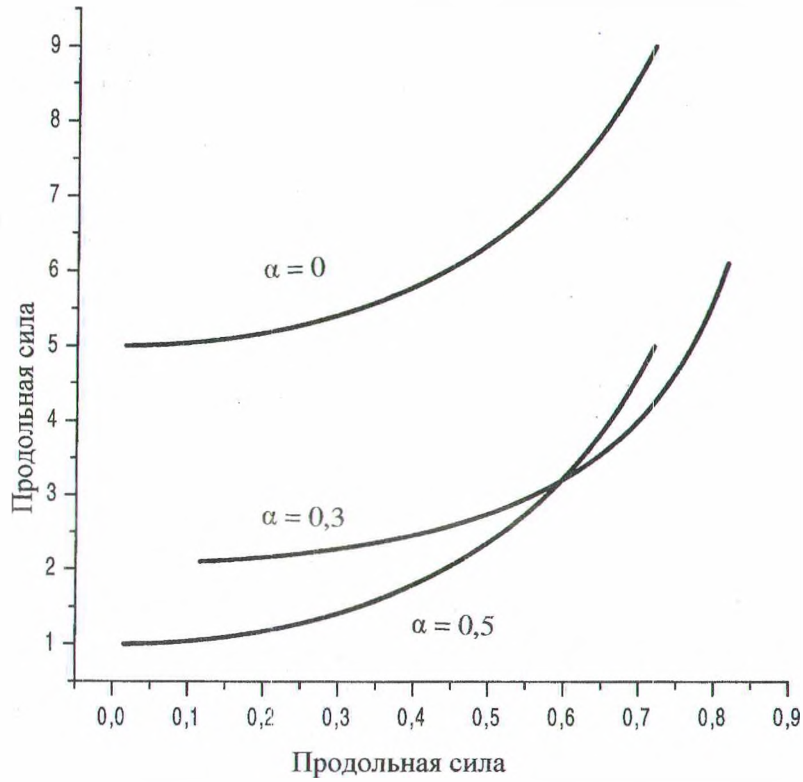

Рис. 2. Зависимость безразмерного прогиба от безразмерной силы
при различных значениях коэффициентах α

Для разных значений α получаем решения, представленные на рис. 3.

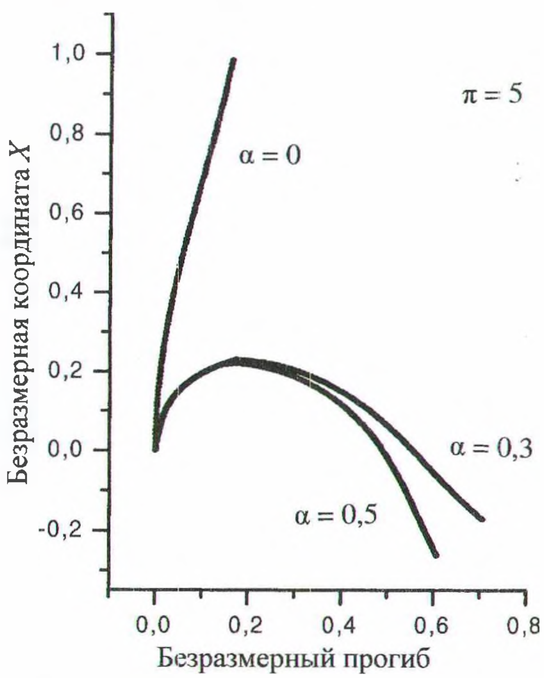

Рис. 3. Упругие линии стволов деревьев
для различных значений коэффицента α

Из рис. 3 видно, что величина прогиба сильно зависит от сбега ствола дерева, характеризуемого коэффициентом α. Коэффициент α, равный нулю, соответствует стволу дерева без сбега. Для него при $\pi = 5$ ствол дерева почти не деформирован. Для той же силы но при коэффициенте α, равном 0.3, ствол дерева теряет устойчивость и сильно деформируется.

На основе полученного решения уравнения (12) с помощью формулы (8) рассчитывается изгибающий момент, что позволяет определить, как меняются напряжения изгиба по длине ствола. В итоге оказывается возможным найти сечение ствола дерева с максимальными изгибными напряжениями при различных значениях коэффициента α.

Таким образом, решение о нелинейных прогибах стволов деревьев позволит в дальнейшем оценивать их прочность, чему будет посвящена отдельная работа.

Литература

1. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей. – Москва; Ижевск: R&C Dynamics, 2002.

2. Тихомиров Е.Н. О прямом изгибе бруса малой жесткости // Расчеты на прочность. – 1962. – Вып. 8. – С. 3–35.

3. Пешль Т. Сопротивление материалов. – Москва, 1948.