УДК 519.624

И.Ф.Соловьева, ст. преп.

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

The differential orthogonal sweep method is proposed for solving linear boundary-value problems with boundary layer. For the areas of boundary layers the regulating factors are introduced. The results of two computational experiments are presented.

Одним из достаточно распространенных классов задач вычислительной математики, благодаря их многочисленным приложениям, являются граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений /о.д.у./ второго порядка с пограничным слоем. Вопросы их численного решения вызывают значительный интерес и связаны с существенными трудностями, возникающими в основном из-за наличия пограничных слоев. Это приводит к снижению порядка сходимости обычных разностных схем и неравномерной их сходимости на равномерных сетках.Для сохранения преимуществ равномерной сетки, обеспечения их устойчивости и сходимости были разработаны приемы введения в обычные разностные схемы подгоночных параметров, с помощью которых можно получить решение непосредственно в зонах пограничных слоев при равномерной точности аппроксимаций на равномерной сетке. Однако использование при этом довольно жестких ограничений на входные параметры задачи сильно сужает классы рассматриваемых задач.

Проблемы разработки новых методов численного решения граничных задач актуальны, интерес к ним достаточно высок, т.к. область их применения все время расширяется. Они широко распространены в физике, механике, динамике жидкостей и т.д., кроме того, многие математические модели в конечном итоге сводятся к решению граничных задач для о.д.у. второго порядка.

Рассмотрим типичные граничные задачи с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$Ly(x) = \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = A, \qquad y(1) = B, \qquad a(x) \geq \alpha > 0, \qquad b(x) \geq 0, \tag{2}$$

$$Ly(x) = \varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$y(0) = A, \qquad y(1) = B, \qquad b(x) \geq \beta > 0, \qquad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Предположим, что задача (1,2) имеет один, а задача (3,4) - два пограничных слоя.

Для решения граничных задач с пограничным слоем вида (1-4) предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки /м.д.о.п./ с введением в зонах пограничных слоев регулирующих множителей $m_1(x,\varepsilon)$ и $m_2(x,\varepsilon)$ [2].

Поскольку пограничный слой развивается в малой окрестности и наиболее полно характеризуется значениями коэффициентов на концах отрезка, будем вводить регулирующие множители именно вблизи этих точек. Пограничный слой характеризуется быстрым ростом производных в маленькой зоне около точек $x = 0$ или $x = 1$. Чтобы регулировать его влияние и придать равноправие функциям $y_1(x)$ - решению граничных задач вида (1-4) и его производной $y_2(x)$, в м.д.о.п. будем вводить регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon) > 0$ для $y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)$ для $y_2(x)$. Во многих случаях можно полагать $m_1(x,\varepsilon) = 1$."Замораживая" коэффициенты в зонах погранслоев в интересующих нас точках, т.е., предполагая, что $a(x) = const$ и $b(x) = const$ в точках $x = 0$ и $x = 1$, получаем решение $y(x)$, например, для задачи (3,4) в виде

$$y(x) = A\frac{e^{\lambda_1+\lambda_2 x} - e^{\lambda_2+\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}} + B\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}\ , \tag{5}$$

где λ_1 ,λ_2 - корни соответствующих характеристических уравнений, причем $\lambda_{1,2}(k) = \pm\sqrt{\frac{b_k}{\varepsilon}}$, $\kappa = 0,1$. По $\lambda_{1,2}$ в зонах пограничных слоев укажем правило выбора $m_2(x,\varepsilon)$.

Обозначим множители при A и B в формуле (5) соответственно $\varphi(x,\varepsilon)$ и $\xi(x,\varepsilon)$. Легко видеть, что, если $x \to 0$, то $\varphi(x,\varepsilon) \to 1$, $\xi(x,\varepsilon) \to 0$; если $x \to 1$, то $\varphi(x,\varepsilon) \to 0$, $\xi(x,\varepsilon) \to 1$.

Имеем:

$$y'(x) = A\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1+\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2+\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}} + B\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}\ . \tag{6}$$

Из соотношения (6) можно заметить, что для задачи (3,4) вблизи точек $x = 0$ и $x = 1$ наблюдается быстрый рост производной. Чтобы его нейтрализовать, на основе предположения $m_2 y'(x) \approx const$ и (6), можно положить: $m_2(x,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b(x)}}th\sqrt{\frac{b(x)}{\varepsilon}}$. Эти множители регулируют поведение $m_1 y_1(x)$ и $m_2 y_2(x)$ в зонах пограничных слоев.

Указанный метод дает возможность применять единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

Приведем способ решения одной из них, например, задачи (3,4) методом дифференциальной ортогональной прогонки, используя при этом процедуру введения регулирующих множителей.

Запишем граничную задачу (3,4) в виде системы о.д.у.

$$y_1' = y_2, \tag{7}$$

$$y_2' = -\frac{f}{\varepsilon} + \frac{by_1}{\varepsilon}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad \varepsilon > 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$y_1(0) = A, \qquad y_1(1) = B\ . \tag{9}$$

Для задачи (7,8) алгоритм м.д.о.п. с регулирующими множителями состоит в следующем. Находим решения соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$:

$$Q' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_2'}{m_2} sin2Q - (\frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon} + \frac{m_1}{m_2})cos^2 Q\ , \tag{10}$$

$$Q(0) = \frac{\pi}{2}\ , \tag{11}$$

$$u' = \frac{1}{2}[(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon})sin2Q + \frac{m_2'}{m_2}cos^2 Q]u - m_2\frac{f}{\varepsilon}cosQ\,, \tag{12}$$

$$u(0) = Am_1(0,\varepsilon), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v' = [-\frac{m_2'}{m_2}sin2Q - \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}cos2Q + 2\frac{m_1}{m_2}cos^2 Q - \frac{m_1}{m_2}]u + \\ +[\frac{m_2}{m_2}sin^2 Q - \frac{1}{2}(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon})sin2Q]v + m_2\frac{f}{\varepsilon}sinQ\ , \end{aligned} \tag{14}$$

$$v(1) = \frac{1}{cosQ(1)}[B - sinQ(1)]u(1), \qquad cosQ(1) = 0\ . \tag{15}$$

Для решения задач Коши (9,10), (11,12) и (13,14), благоприятных в вычислительном отношении, существуют хорошо известные методики [3].

Исходное решение получаем путем подстановки найденных значений $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$ в формулы:

$$m_1(x,\varepsilon)y_1(x) = sinQ(x)u(x) + cosQ(x)v(x)\,, \tag{16}$$

$$m_2(x,\varepsilon)y_2(x) = cosQ(x)u(x) - sinQ(x)v(x)\,. \tag{17}$$

Имеет место следующее тождество:

$$u^2(x) + v^2(x) = (m_1(x,\varepsilon)y_1(x))^2 + (m_2(x,\varepsilon)y_2(x))^2, \qquad (18)$$

показывающее, что порядок роста функций $u(x)$ и $v(x)$ одинаков с порядком роста $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$.

В качестве примера рассмотрим задачу расчета критической нагрузки колонны с шарнирным концом, на которую действует сила P. Математическая модель этой задачи предлагается как пример задачи, интересной в прикладном и вычислительном отношениях.

Рассмотрим о.д.у. второго порядка с граничными условиями:

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(x) = 0, \qquad (19)$$

где $\lambda = P/EI$, I - момент инерции, E - модуль Юнга, t - осевая координата, x - длина колонны. Полагаем $\lambda = \pi^2$. Требуется определить критическую длину x^* колонны и несколько псевдокритических длин.

Точные значения критической длины и псевдокритических длин известны, они соответственно равны 1 и 2,3,4 и т.д. Достигается критическая длина при $Q(x) = \frac{\pi}{2} + \pi$, а псевдокритические длины при $Q(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, к=2,3,4 и т.д. Результаты вычислений отражены в таблице.

Табл. Численное решение задачи (18)

t_k	$\Theta(t_k)$	x^*	$\pi/2 + k\pi$
1.00	4.712388795	1.000000989	4.71238898
2.00	7.853981263	2.000001743	7.85398163
3.00	10.995573731	3.000002913	10.99557427

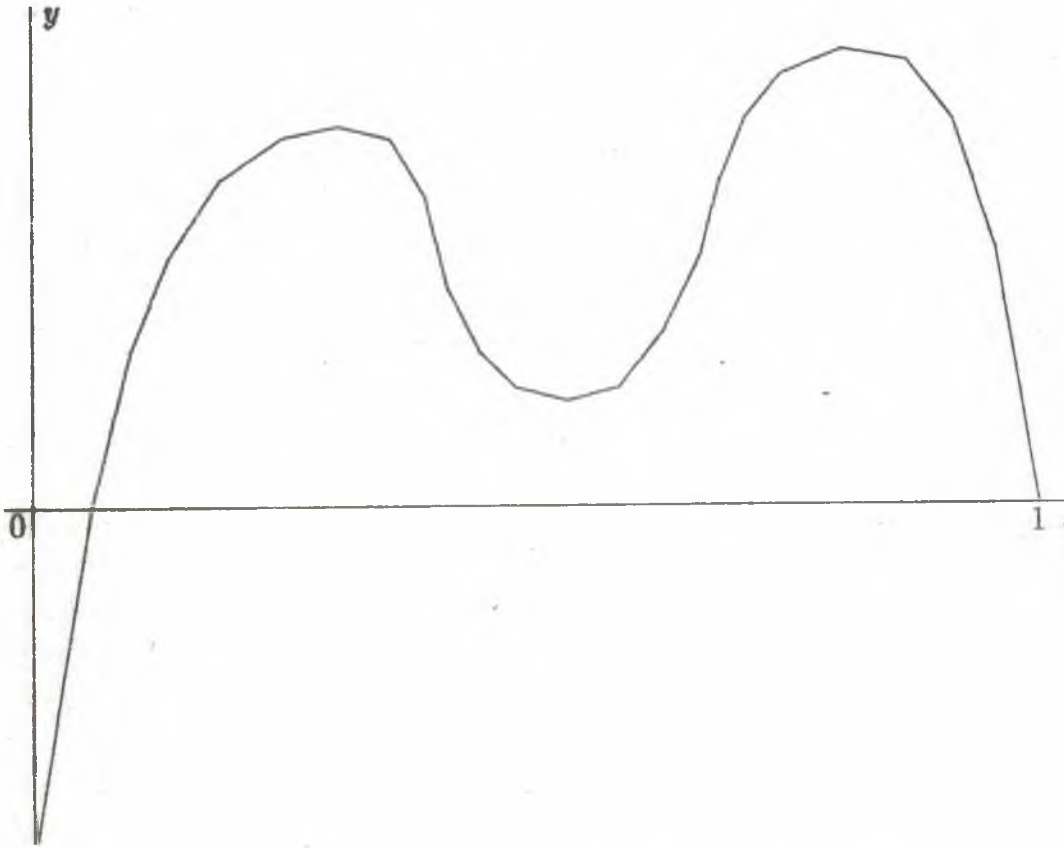
Предложим решение еще одной граничной задачи, по которой уже были получены численные результаты [1].

Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем:

$$-\varepsilon y''(x) + (1 + x^2)y(x) = 4(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1), \qquad x \in [0,1], \qquad (20)$$

$$y(0) = -1, \qquad y(1) = 0, \qquad \varepsilon = .0078125, \qquad h = \frac{1}{16}. \qquad (21)$$

Приведем численное решение этой задачи схематично в виде графика



Граничная задача (19,20) решена м.д.о.п. Проведено сравнение полученных результатов с результатами в [1]. Достоинство предлагаемого метода выражается также и в том, что он применим для задач с более естественными предположениями относительно начальных данных, не требует измельчения сетки, легко реализуется на ЭВМ и позволяет избежать неустойчивости численного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем //Пер. с англ. -М. 1983. -С.200

2. Кулешова И.Ф. О способах введения регулирующих множителей в методе прогонки для задач с пограничным слоем //Известия АН БССР, сер.физико-матем. Минск. 1989, 4.С.16-19.

3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений //Пер. с англ. -М.1988. -С.330