УДК 517.982.1

Е.А. Шинкевич, канд. физ.-мат. наук

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДПОРЯДКА

In this paper we introduce the new class of step-liner function and show that a total conic preoder can be analytical represented by step-liner function.

Пусть X — вещественное векторное пространство, и пусть $\mathcal{V}$ совокупность всех векторных подпространств из X. Отношение включения определяет на $\mathcal{V}$ частичный порядок, относительно которого $\mathcal{V}$ — полная решетка, при этом точная верхняя и нижняя грани любого семейства векторных подпространств из $\mathcal{V}$ есть, соответственно, их линейная оболочка и их пересечение. Подсемейство $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ называется *цепью* векторных подпространств, если для любых $L, L' \in \mathcal{L}$ выполняется либо $L \subset L'$, либо $L' \subset L$. Любая цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ — подрешетка в $\mathcal{V}$, однако может не быть полной подрешеткой. Цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$, которая как подрешетка является полной, будем называть *полной цепью*. Наименьшая полная цепь, содержащая заданную цепь $\mathcal{L}$, называется *пополнением цепи* $\mathcal{L}$. Говорят, что цепь $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ *максимальна* в подмножестве $\mathcal{W}$ из $\mathcal{V}$, если $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$ и для любой другой цепи $\mathcal{L}' \subset \mathcal{W}$ включение $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ возможно лишь тогда, когда $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Если подмножество $\mathcal{W}$ является полной подрешеткой в $\mathcal{V}$, то любая цепь, максимальная в $\mathcal{W}$, является полной, но не наоборот.

Пусть E_0 и E — заданные векторные подпространства из X, причем $E_0 \subset E$. Отрезок $[E_0; E] := \{L \in \mathcal{V} | E_0 \subset L \subset E\}$ — полная подрешетка в $\mathcal{V}$ с наименьшим элементом E_0 и наибольшим E. Так как $[E_0; E]$ — полная подрешетка в $\mathcal{V}$, то любая цепь из $[E_0; E]$ обладает в $[E_0; E]$ точной верхней гранью. Следовательно, по теореме Хаусдорфа (см., например, [4]), любая цепь из $[E_0; E]$ может быть вложена в цепь, максимальную в $[E_0; E]$.

Пирамидой векторных подпространств в X назовем любую полную цепь $\mathcal{L}$ из $\mathcal{V}$.

Векторные подпространства

$$E_0 := \bigcap\{L \mid L \in \mathcal{L}\} \text{ и } E := \bigcup\{L \mid L \in \mathcal{L}\}$$

будем называть соответственно *вершиной* и *основанием* пирамиды $\mathcal{L}$. Из свойства полноты следует, что как вершина E_0, так и основание E, принадлежат пирамиде.

О любой пирамиде $\mathcal{L}$ векторных подпространств $\mathcal{L}$ с вершиной E_0 и основанием E будем говорить, что она является пирамидой над E.

Нетрудно видеть, что любая конечная цепь $\mathcal{L} := \{E_0, E_1, \cdots, E_m\}$ из $\mathcal{V}$ — пирамида, при этом если $E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_m$, то E_0 и E_m — вершина и основание пирамиды соответственно.

Любое одноэлементное семейство $\mathcal{L} = \{E\}$ (E — векторное подпространство из X) является пирамидой, у которой вершина и основание совпадают и равны E. Такие пирамиды будем называть *тривиальными*.

Пирамиду векторных подпространств с вершиной E_0 и основанием E назовем *максимальной*, если она является максимальной цепью в $[E_0, E] := \{L \in \mathcal{V} | E_0 \subset L \subset E\}$.

Пусть $\mathcal{L}$ — нетривиальная ($E_0 \neq E$) пирамида над E с вершиной E_0. Каждому $L \in \mathcal{L}$, $L \neq E_0$ поставим в соответствие содержащееся в нем векторное подпространство

$$\hat{L} := \bigcup\{L' \in \mathcal{L} | L' \subset L, L' \neq L\}.$$

Из свойства полноты пирамиды следует, что $\hat{L} \in \mathcal{L}$ и либо $\hat{L}$ совпадает с L, либо $\hat{L}$ непосредственно предшествует L в $\mathcal{L}$.

Истинными ступенями пирамиды $\mathcal{L}$ будем называть непустые подмножества вида $S := L \setminus \hat{L}$, где $L \in \mathcal{L} \setminus E_0$.

Вершину E_0 также будем рассматривать, как одну из ступеней пирамиды $\mathcal{L}$ и в таком качестве будем называть ее вершинной ступенью. Вершинная ступень и все истинные ступени образуют семейство всех ступеней пирамиды $\mathcal{L}$. Обозначим его через $\sum$. Нетрудно видеть, что каждая ступень симметрична относительно нуля, т. е. для любой $S \in \sum$ из того, что $x \in S$, следует $-x \in S$.

Нетрудно убедиться, что семейство $\sum$ всех ступеней пирамиды $\mathcal{L}$ является разбиением ее основания E.

Отношение предпорядка (рефлексивное и транзитивное бинарное отношение) $\trianglelefteq$, определенное на векторном подпространстве E, назовем *ступенчатым*, если оно удовлетворяет условиям:

(SO1) для любых $x, y \in E$ и любого вещественного числа $\alpha \in R$: $y \trianglelefteq x \Rightarrow \alpha y \trianglelefteq x$;

(SO2) для любых $x, y_1, y_2 \in E$: $y_1 \trianglelefteq x$, $y_2 \trianglelefteq x \Rightarrow y_1 + y_2 \trianglelefteq x$.

Для любого $x \in E$ определим множества $E_x := \{y \in E \mid y \trianglelefteq x\}$ и $\widehat{E}_x := \{y \in E \mid y \triangleleft x\}$. Здесь $y \triangleleft x$ означает, что $y \trianglelefteq x$, $x \ntrianglelefteq y$. Из свойств (SO1) и (SO2) следует, что E_x — векторное подпространство. Множество $\widehat{E}_x$, вообще говоря, векторным подпространством не является. Однако если отношение предпорядка $\trianglelefteq$ полное, т. е. если для любых $x, y \in E$ выполняется либо $x \trianglelefteq y$, либо $y \trianglelefteq x$, то $\widehat{E}_x$ также есть векторное подпространство. Транзитивность отношения $\trianglelefteq$ влечет, что $E_y \subset E_x$ всякий раз, когда $y \trianglelefteq x$. Очевидно, что верно и обратное. Следовательно, какие бы ни были $x, y \in E$, справедливы тождества $y \trianglelefteq x \Leftrightarrow E_y \subset E_x$ и $y \triangleleft x \Leftrightarrow E_y \subset E_x$, $E_y \neq E_x$.

Символом $<>$ обозначим отношение эквивалентности, порождаемое отношением предпорядка $\trianglelefteq$. По определению

$$x <> y \Leftrightarrow x \trianglelefteq y,\ y \trianglelefteq x. \tag{1}$$

Нетрудно видеть также, что
$y <> x \Leftrightarrow E_y = E_x \Leftrightarrow S_y = S_x \Leftrightarrow y \in S_x$,
где

$$S_x = \begin{cases} E_0, & \text{для } x \in E_0, \\ E_x \backslash \widehat{E}_x, & \text{для } x \in E \setminus E_0. \end{cases}$$

Пусть $\sum := E/_{<>}$ — множество классов эквивалентности, на которые разбивает E отношение эквивалентности $<>$. Для каждого $S \in \sum$ и любого $x \in S$ имеем $S = S_x$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [2]. *Каждому полному ступенчатому отношению предпорядка $\trianglelefteq$, определенному на векторном подпространстве $E \subset X$, однозначно соответствует пирамида векторных подпространств над E, множество ступеней которой совпадает с множеством классов эквивалентности $E/_{<>}$, где $<>$ — отношение эквивалентности, порождаемое в силу* (1) *отношением $\trianglelefteq$.*

Теорема 2 [2]. *Любая пирамида векторных подпространств $\mathcal{L}$ с основанием E порождает на E полное ступенчатое отношение пред-порядка $\trianglelefteq$, определяемое тождеством*

$$x \trianglelefteq y \Leftrightarrow L_x \subset L_y \quad (L_x = \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\}),$$

при этом множество ступеней $\sum$ пирамиды $\mathcal{L}$ совпадает с фактор-множеством $E/_{<>}$.

Теоремы 1 и 2 устанавливают фактически взаимно однозначное соответствие между совокупностью всевозможных пирамид векторных подпространств в X и совокупностью всех полных ступенчатых отношений предпорядка, определенных на векторных подпространствах из X.

Пусть $L(X)$ — векторное пространство вещественнозначных линейных функций, определенных на X.

Семейство $\mathcal{F}$ из $L(X)$ назовем *кортежем линейных функций* на X, если:

а) на $\mathcal{F}$ определено отношение совершенного порядка $\preceq$;

б) для любого $\mathcal{F} x \in X$ подсемейство $\mathcal{F}_x := \{l \in \mathcal{F} \mid l(x) \neq 0\}$ либо пусто, либо имеет наименьший (в смысле $\preceq$) элемент l_x.

Кортеж линейных функций $\mathcal{F}$ из $L(x)$ назовем *несократимым*, если

в) для любого $l \in \mathcal{F}$ существует $x \in X$ такой, что $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$ и $l = l_x$.

Впервые семейства линейных функций, удовлетворяющие свойствам а) и б), рассматривались Кли в [5]. Термин *кортеж линейных функций* для таких семейств введен позднее В. В. Гороховиком в [1].

Очевидно, что любое вполне упорядоченное семейство $\mathcal{F}$ из $L(X)$ является кортежем линейных функций на X. Однако не любой кортеж вполне упорядочен.

Теорема 3 [2]. *Для любой максимальной пирамиды векторных подпространств $\mathcal{L}$ над X существует несократимый кортеж линейных функций $\mathcal{F}$ такой, что:*

i) вершина E_0 пирамиды $\mathcal{L}$ удовлетворяет равенству

$$E_0 = \{x \in X \mid l(x) = 0 \text{ для всех } l \in \mathcal{F}\};$$

ii) множество истинных ступеней $\sum \backslash \{E_0\}$ пирамиды $\mathcal{L}$ порядково антиизоморфно $\mathcal{F}$, причем ступень $S \in \sum \backslash \{E_0\}$ и соответствующая ей линейная функция $l_S \in \mathcal{F}$ связаны равенством

$$S_l = \{x \in X \mid l'(x) = 0 \text{ для всех } l' \in \mathcal{F}, l' \prec l$$

и

$$l(x) \neq 0\}.$$

Здесь $\sum$ — множество всех ступеней пирамиды $\mathcal{L}$.

Вещественнозначную функцию $c : x \to R$ будем называть *ступенчато-линейной*, если над X существует максимальная пирамида векторных подпространств $\mathcal{L}$ такая, что:

(StL1) $c(x)=0$ в том и только том случае, когда $x \in E_0$, где E_0 — вершина пирамиды $\mathcal{L}$;

(StL2) для каждого $L \in \mathcal{L}$, $L \neq E_0$ функция

$$x \to l_L(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \hat{L}, \\ c(x), & \text{если } x \in L \setminus \hat{L} \end{cases}$$

является линейной на векторном пространстве L.

Каждая ступенчато-линейная функция $c : x \to R$ может быть определена с помощью некоторого кортежа линейных функций из $L(X)$.

Теорема 4 [2]. *Пусть $\mathcal{F}$ — кортеж линейных функций на X. Тогда функция*

$$c : x \to c(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \varnothing, \\ l_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \varnothing \end{cases}$$

ступенчато-линейна.

Ступенчато-линейная функция обладает следующим свойством.

Теорема 5 [2]. *Любая ступенчато-линейная функция $c : x \to R$ является однородной, т. е. $c(\alpha x) = \alpha c(x)$ для всех $x \in X$ и всех $\alpha \in R$.*

Отношение предпорядка $\precsim$, определенное на векторном пространстве X, назовем коническим, если:

а) $x \precsim y \Rightarrow \alpha x \precsim \alpha y$ для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in R$, $\alpha > 0$;

б) $x \precsim y \Rightarrow x + z \precsim y + z$ для всех $x, y, z \in X$.

Легко убедиться, что

$$x \precsim y \Leftrightarrow y - x \in P(\precsim), \tag{2}$$

где $P(\precsim) := \{x \in X \mid 0 \precsim x\}$ — конус положительных элементов отношения $\precsim$.

Заметим, что для того чтобы коническое отношение предпорядка $\precsim$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы

$$P(\precsim) \bigcup (-P(\precsim)) = X.$$

Тождество (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью конических отношений предпорядка, определенных на векторном пространстве X, и совокупностью заостренных (т. е. содержащих 0) выпуклых конусов из X.

Для любого вектора $x \in X$ определим его абсолютное значение $|x|$ (в смысле отношения $\precsim$), положив

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \precsim x, \\ -x, & \text{если } x \prec 0. \end{cases}$$

где $\prec$ — асимметричная часть отношения $\precsim$.

Теорема 6. *Пусть $\precsim$ — полное коническое отношение предпорядка на X. Тогда бинарное отношение $\trianglelefteq$, определенное на X тождеством*

$$x \trianglelefteq y \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ такой, что } |x| \precsim \lambda |y|, \tag{3}$$

является полным ступенчатым отношением предпорядка.

Непосредственно из определения отношения предпорядка $\trianglelefteq$ следует, что отношение эквивалентности $<>$, являющееся симметричной частью $\trianglelefteq$, определяется тождеством

$$x <> y \Leftrightarrow \exists \nu > 0,\ \mu > 0$$

такие, что $\nu|y| \precsim |x| \precsim \mu|y|$.

Лемма 1 [3]. *Для любых $x, y \in X$ соотношение $x <> y$ выполняется в том и только в том случае, когда $x, y \in E_0$ или $x, y \notin E_0$ и существует положительное вещественное число α, такое, что $|y| - \alpha|x| \lhd x$, при этом число α определяется единственным образом.*

Теорема 7 [3]. *Пирамида векторных подпространств над X, соответствующая полному ступенчатому отношению предпорядка $\trianglelefteq$, определенному тождеством (3), является максимальной, причем векторное пространство $E_0 = \{x \in X \mid 0 \precsim x, 0 \precsim -x\}$ есть вершина этой пирамиды, а каждая истинная ступень S может быть определена по произвольному принадлежащему ей вектору $x \in S$ посредством равенства*

$$S = \{y \in X \mid \exists \alpha > 0 : |y| - \alpha|x| \lhd x\}. \tag{4}$$

Теорема 8. *Бинарное отношение $\precsim$, определенное на векторном пространстве X, является полным коническим отношением предпорядка на X тогда и только тогда, когда существует ступенчато-линейная функция $c : x \to R$ такая, что*

$$x \precsim y \Leftrightarrow c(x - y) \leq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно исходя из свойств ступенчато-линейных функций.

Необходимость. В силу теоремы 6 каждое полное коническое отношение предпорядка $\precsim$ порождает на X полное ступенчатое отношение предпорядка, определенное тождеством (3). Теорема 7 в свою очередь утверждает, что пирамида векторных подпространств $\mathcal{L}$, соответствующая $\trianglelefteq$, является максимальной; вершина этой пирамиды есть векторное подпространство $E_0 = \{x \in X \mid 0 \preceq x, 0 \preceq -x\}$, а каждая истинная ступень S может быть определена равенством (4) по произвольному заданному элементу $x \in S$. Воспользуемся далее теоремой 3, из которой следует, что для пирамиды $\mathcal{L}$ существует несократимый кортеж линейных функций $\mathcal{F} \subset L(X)$, такой, что $E_0 = \{x \in X \mid l(x) = 0 \text{ для всех } l \in \mathcal{F}\}$, а множество истинных ступеней пирамиды $\mathcal{L}$ порядково антиизоморфно $\mathcal{F}$, причем ступень S_l, соответствующая $l \in \mathcal{F}$, определяется равенством

$$S_l = \{x \in X \mid l'(x) = 0 \text{ для всех } l' \in \mathcal{F}, l' < l \text{ и } l(x) \neq 0\}. \quad (6)$$

Так как $S_l \bigcap E_0 = \varnothing$, то для любого $x \in S_l$ имеет место либо $x < 0$, либо $0 < x$. Пусть $S_l^+ = \{x \in S_l \mid 0 < x\}$ и $S_l^- = \{x \in S_l \mid x < 0\}$ Заметим, что в силу симметричности ступеней $S_l^+ = -S_l^-$.

Пусть $x, y \in S_l^+$. Из леммы 1 следует, что существуют положительное число α и вектор $u \in X$, удовлетворяющий соотношению $u \triangleleft x$, такие, что $y = \alpha x + u$. Так как $l(u) = 0$, то $l(y) = \alpha l(x)$. Из этого заключаем, что линейная функция l принимает на векторах множества S_l^+ значения постоянного знака. Поскольку элементы кортежа $\mathcal{F}$ определяются пирамидой $\mathcal{L}$ неоднозначно, а лишь с точностью до ненулевого числового множителя, то без ограничения общности можно считать, что $l(x) > 0$ для всех $x \in S_l^+$ и всех $l \in \mathcal{F}$. В силу равенства $S_l^+ = -S_l^-$ имеем также, что $l(x) < 0$ для всех $x \in S_l^-$ и всех $l \in \mathcal{F}$.

Таким образом, из равенства (6) получаем

$$S_l^+ = \{x \in X \mid l'(x) = 0 \text{ для всех } l' \in \mathcal{F},\ l' < l \text{ и } l(x) > 0\},$$

$$S_l^- = \{x \in X \mid l'(x) = 0 \text{ для всех } l' \in \mathcal{F},\ l' < l \text{ и } l(x) < 0\}.$$

В силу теоремы 4 кортежу $\mathcal{F}$ соответствует ступенчато-линейная функция $c : x \to R$, такая, что

$$c(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \varnothing, \\ l_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \varnothing. \end{cases}$$

Так как конус положительных векторов $P(\preceq)$ отношения $\preceq$ является дизъюнктным объединением вершины E_0 и семейства S_l^+, $l \in \mathcal{F}$, состоящего из положительных поло-винок истинных ступеней пирамиды $\mathcal{L}$, то нетрудно видеть, что

$$x \in P(\preceq) \Leftrightarrow c(x) \geq 0.$$

Из этого тождества, а также из (2) и однородности функции $c(x)$ получаем (5). Теорема доказана.

Литература

1. Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. — Мн.: Наука и техника, 1990. — 239 с.

2. Гороховик В. В., Шинкевич Е. А. Теоремы об отделимости выпуклых множеств ступенчато-линейными функциями и их приложения к выпуклым задачам оптимизации // Нелинейный анализ и приложения / Национальная Академия наук Беларуси. Труды Института математики. — 1998. — Т. 1. — С. 58–85.

3. Гороховик В. В., Шинкевич Е. А. Ступенчатые отношения предпорядка на векторных пространствах // Докл. АН Беларуси. — 1998. — Т. 42, № 6. — С. 28–31.

4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука. — 1981. — 544 с.

5. Klee V. The structure of semispaces // Math. Scand. — 1956. — Vol. 4. — P. 54–64.