УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доцент

О МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА ПРИСТРЕЛКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

In article for nonlinear boundary problem with small parameter at the higher derivative modifications of a method of shooting for various positions of boundary layers are offered.

Разработка новых численных методов и приложение к численному решению нелинейных граничных задач, в том числе к нелинейным задачам с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными и внутренними переходными слоями, очень сложных в вычислительном отношении, требуют достаточно полной информации о поведении решения задачи и о его свойствах. Поэтому актуальным остается построение и исследование вычислительных алгоритмов, обладающих способностью адаптироваться и гибко использовать информацию, получаемую в ходе выполнения вычислительного эксперимента [1]. К числу таких методов можно отнести различные модификации методов пристрелки.

Рассмотрим систему нелинейных о. д. у. первого порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

где

$$y : [a,b] \to R^n, f : [a,b] \times R^n \to R^n.$$

Будем предполагать, что зависимость f от параметра ε такова, что в соответствующих граничных задачах могут возникать пограничные либо внутренние переходные слои. Это в ряде случаев можно обнаружить путем использования информации о решении исходной задачи и некоторых его свойств [2]. Роль малого параметра ε естественным образом транслируется через решение граничной задачи.

Присоединим к уравнению (1) двухточечное граничное условие наиболее общего вида

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $g : R^n \times R^n \to R$.

Будем предполагать, что отображение f, g и отрезок $[a,b]$ таковы, что задача (1, 2) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

В методах пристрелки практически отсутствуют какие-либо специальные ограничения на правую часть f, вид граничных условий g и области интегрирования $[a, b]$.

Для самых сложных случаев, когда решение характеризуется переходными слоями, нужно гибко использовать свойства решений, выявленных в ходе эксперимента.

Рассмотрим ряд модификаций метода пристрелки, учитывающих влияние пограничного слоя на концах отрезка.

1. Пусть пограничный слой имеет место на правом конце отрезка $[a, b]$. В этом случае пристрелку выгодно организовать таким образом, чтобы влияние пограничного слоя наиболее существенно проявлялось на заключительном этапе вычислений. Это возможно осуществить в форме прямой множественной пристрелки, сохраняя направление слева направо.

Выберем точки пристрелки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ и рассмотрим пристрелочные задачи Коши:

$$\begin{cases} u' = f(t,u), & t \in J_j^{(+)} = \{t_j \le t \le t_{j+1}\}, \\ u(t, y_j)\big|_{t=t_j} = y_j, & y_j \in R^n, \quad j = \overline{0, p-1}, \end{cases} \tag{3}$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ – параметры пристрелки, которые могут быть определены как решение замыкающей системы уравнений:

$$\begin{cases} u(t_{j+1}, y_j) - y_{j+1} = 0, \; j = \overline{0, p-1}, \\ g(y_0, y_p) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для решения задач Коши вида (3) в настоящее время существует достаточно большой арсенал хорошо работающих методов [1].

Запишем систему (4) в операторной форме:

$$H(z) = 0, \tag{5}$$

где

$$H : R^r \to R^r, \; r = (p+1)n,$$
$$z = (y_0^T, y_1^T, \ldots, y_p^T)^T.$$

Для решения замыкающей системы уравнений достаточно удобно применять метод Ньютона.

Конструктивную сторону системы уравнений (4) будем характеризовать матрицей Якоби, записанной в виде

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_0^{(1)} & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & U_1^{(2)} & -I & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & U_{p-1}^{(p)} & -I \\ G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_p \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы-блоки включают в себя частные производные. Здесь приняты обозначения:

$$U_j^{(j+1)} = \frac{\partial u(t_{j+1}, y_j)}{\partial y_j}, \quad G_0 = \frac{\partial g(y_0, y_p)}{\partial y_0},$$

$$G_p = \frac{\partial g(y_0, y_p)}{\partial y_p}.$$

2. Пусть пограничный слой имеет место на левом конце отрезка. В этом случае алгоритм метода пристрелки легче реализовать в форме обратной множественной пристрелки, справа налево, т. е. в виде

$$\begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J_j^{(-)} = \{t_j \geq t \geq t_{j-1}\}, \\ v(t, y_j)\big|_{t=t_j} = y_j,\, y_j \in R^n,\, j = g, g-1, \ldots 1, \end{cases} \tag{7}$$

причем отрезок $[a,\ b]$ точками пристрелки разбивается на подынтервалы следующим образом:

$$b = t^{(g)} > t^{(g-1)} > \ldots > t^{(1)} > t^{(0)} = a\,.$$

Для решении задач Коши вида (7) существует много известных и благоприятных в вычислительном отношении методик [1].

Замыкающая система в данном случае будет иметь вид

$$\begin{cases} v(t_{j-1}, y_j) - y_{j-1} = 0,\ j = g, g-1, \ldots, 1, \\ g(y_0, y_p) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что порядок этой системы определяется числом точек пристрелки и порядком системы о. д. у. Если число точек выбрано и закреплено, то в дальнейших вычислениях порядок системы уравнений будет оставаться неизменным, и он никак не будет зависеть от того, какая сетка используется на подынтервалах пристрелки при численном интегрировании задач Коши.

В операторной форме замыкающая система (8) будет выглядеть следующим образом:

$$G(z) = 0, \tag{9}$$

где

$$G : R^S \to R^S,\ s = (g+1)n,$$

$$z = (y_g^T, y_{g-1}^T, \ldots, 1)^T.$$

Аналогично, как и в предыдущем случае, для решения замыкающей системы применяем метод Ньютона.

Выпишем матрицу Якоби в следующем виде:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \begin{bmatrix} V_g^{(g-1)} & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & V_{g-1}^{(g-2)} & -I & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & V_1^{(0)} & -I \\ G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_g \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Аналогично, как и в первом случае, матрицы-блоки также будут содержать частные производные. Здесь приняты следующие обозначения:

$$V_j^{(j+1)} = \frac{\partial v(t_{j-1}, y_j)}{\partial y_j}, \quad G_0 = \frac{\partial g(y_0, y_g)}{\partial y_0},$$

$$G_g = \frac{\partial g(y_0, y_g)}{\partial y_g}.$$

В случаях, когда пограничный слой имеет место на левом или на правом концах отрезка, при выборе точек пристрелки нужно исходить из того, что ширина пограничного слоя очень мала, а зона благоприятного развития решений занимает основную часть отрезка. Поэтому большая часть подынтервалов пристрелки должна быть сосредоточена в зоне пограничного слоя.

3. Теперь предположим, что пограничный слой имеет место на обоих концах отрезка, тогда множественную пристрелку можно организовать таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях. В этом случае вычислительные схемы можно обобщить следующим образом

Обозначим

$$a < t_0 < t_1 < \ldots < t_g = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \ldots < \hat{t}_{p-1} < \hat{t}_p = b\,.$$

Построим пристрелочные задачи Коши в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad t \in J_j^{(+)} = \{\hat{t}_j \leq t \leq \hat{t}_{j+1}\}, \\ u(t, \hat{y}_j)\big|_{t=\hat{t}_j} = \hat{y}_j, \quad \hat{y}_j \in R^n, \quad j = \overline{0, p-1}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} v' = f(t, y_j),\ t \in J_j^{(-)} = \{t_j \geq t \geq t_{j-1}\}, \\ v(t, y_j)\big|_{t=t_j} = y_j,\ y_j \in R^n,\ j = g, g-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{12}$$

Для полученных пристрелочных задач Коши вида (11), (12) аналогичным образом составим замыкающую систему вида:

$$\begin{cases} u(t_{j+1}, \hat{y}_j) - \hat{y}_{j+1} = 0,\ j = \overline{0, p-1}, \\ v(t_{j-1}, y_j) - y_{j-1} = 0,\ j = g, g-1, \ldots 1, \\ g(y_0, \hat{y}_p) = 0, \quad y_g = \hat{y}_0. \end{cases} \tag{13}$$

Замыкающую систему вида (13), учитывающую одновременно прямое и обратное направление метода множественной пристрелки, представим в операторном виде:

$$F(z) = 0, \qquad (14)$$

где

$$F : R^N \to R^N, \quad N = r + s = (p + g + 1)n,$$

$$z = (\hat{y}_0^T, \hat{y}_1^T, \ldots, \hat{y}_{p-1}^T, \quad \hat{y}_p^T = y_g^T, \quad y_{g-1}^T, \ldots y_0^T)^T.$$

Решения задач Коши (11,12) получаем известными методами [1], а для решения обобщенной замыкающей системы в операторном виде (14) можно использовать широкий набор разнообразных методов, например метод Ньютона или его модификации, адаптированные к свойствам уравнения вида (14).

О свойствах матрицы Якоби можно судить, если матрицы-блоки описаны достаточно полно [3]. Обозначим их следующим образом:

$$U_j^{(j+1)} = \frac{\partial u(t_{j+1}, \hat{y}_j)}{\partial \hat{y}_j}, \quad V_j^{(j-1)} = \frac{\partial v(t_{j-1}, y_j)}{\partial y_j},$$

$$\hat{G}_0 = \frac{\partial g(y_0, \hat{y}_p)}{\partial \hat{y}_j}, \quad \hat{G}_p = \frac{\partial g(y_0, \hat{y}_j)}{\partial \hat{y}_p}.$$

На основании вышесказанного для случая замыкающей системы вида (14) получим обобщенную матрицу Якоби $\partial F(z)/\partial z$:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \begin{bmatrix} \hat{U}_0^{(1)} & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{U}_1^{(2)} & -I & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & V_1^{(0)} & -I \\ G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_p \end{bmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства системы, в частности условие ее разрешимости. Замыкающая система, представленная в операторном виде (14) имеет блочный вид. В первых (m – 1) блочных строках она двухдиагональна, а в последней строке ненулевыми являются только матрицы, стоящие на первом и последнем местах. Анализ матриц-блоков может выявить свойства замыкающей системы и обнаружить возможности их регулирования.

Процедуру численного решения задач Коши, предназначенных для определения блоков

$$U_{2j-1}^{(2j)} \text{ и } V_{2j-1}^{(2j)}$$

можно видоизменить таким образом, чтобы сохранить в основном свойства, присущие методу Ньютона, и добиться при этом экономии вычислений. С этой целью в реальных вычислениях выгодно использовать модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби, в частности, можно строить, например, последовательные приближения. При исследовании сходимости предлагаемых модификаций метода пристрелки на первое место выдвигается свойство изолированности решения изучаемой граничной задачи вида (1,2), из которого при соответствующей подготовке исходных данных следует сходимость метода Ньютона и родственных ему задач.

В наиболее сложных случаях, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, резкими перепадами, осцилляциями, а в ряде случаев и разрывами первого рода, алгоритм пристрелки следует строить таким образом, чтобы он мог адаптироваться к выявляемым в процессе вычислительного эксперимента свойствам решения и обладал бы необходимой для этих целей гибкостью.

Практическая реализация и качество рассмотренных алгоритмов зависят, главным образом, от выбора числа подынтервалов пристрелки, определения их длин и регулировки свойств замыкающей системы.

Литература

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. — М., 1983. — 200 с.

2. Кулешова И. Ф., Монастырный П. И. К теории метода множественной двусторонней пристрелки для линейных задач с пограничным слоем // ДАН БССР, 1989. – Т. 33, № 2. – С. 106–109.

3. Кулешова И.Ф. Получение границ спектра матриц Якоби в методе множественной двусторонней пристрелки // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. – Мн., 1995. – Вып. II. – С. 44.