УДК 512.812.4

Н.П. Можей, канд. физ.-мат. наук

ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ И ФИЛЬТРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

In this paper we use the abstract theory of filtered and graded Lie algebras. The major tool in the study of filtered Lie algebras is to consider graded Lie algebras associated with them. The paper is devoted to the complete classification of real transitive graded Lie algebras. We describe finite-dimensional real graded Lie algebras such that $h_{-1} = V$, assuming that $\dim V = 3$.

Градуированные и фильтрованные алгебры Ли являются важным объектом дифференциальной геометрии и анализа. Наиболее интересные пространства в дифференциальной геометрии описываются именно вещественными конечномерными градуированными алгебрами Ли. Ключевой идеей исследований в этой области является переход от гладких многообразий к фильтрованным (т. е. с фиксированной фильтрацией касательного расслоения). В этом случае роль касательного расслоения выполняет градуированное векторное расслоение, ассоциированное с заданной фильтрацией, а слои этого расслоения естественным образом наделяются структурой градуированной алгебры Ли. Указанная задача также тесно связана с проблемой описания конечномерных алгебр Ли векторных полей, которая является стартовой точкой для симметрийного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, так как, зная решение этой задачи, можно получить все алгебры симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений. Проблемы описания алгебр векторных полей могут быть сформулированы естественным образом в терминах градуированных и фильтрованных алгебр Ли.

Пусть M — однородное пространство, на котором транзитивно действует группа Ли G; G_0 — стабилизатор некоторой точки на многообразии; (g, g_0) — соответствующая пара алгебр Ли. С алгебраической точки зрения пространство M описывается парой (g, g_0), где g — конечномерная алгебра Ли, а g_0 — ее эффективная подалгебра (т. е. g_0 не содержит собственных идеалов алгебры g). Для описания алгебр Ли векторных полей на многообразии можно использовать абстрактную теорию градуированных алгебр Ли. Построим цепочку подалгебр следующим образом:

$$g_{-1} \supset g_0 \supset g_1 \supset \ldots,\ g_q = g, q \le -1;$$

$$g_{p+1} = \{x \in g_p \mid [x, g] \subset g_p\}, p \ge 0,$$

при этом $\cap g_p = \{0\}$ (т. к. g_0 — эффективна). Получили транзитивную фильтрованную алгебру Ли (нетрудно заметить, что $\subset g_{i+j}$ для всех $i, j \in Z$). Пусть $h_p = g_p / g_{p+1}$, $h = \oplus_{p=-\infty}^{+\infty} h_p$. Определим умножение в h следующим образом:

$$[x_p + g_{p+1}, y_q + g_{q+1}] = [x_p, y_q] + g_{p+q+1}$$

для всех $x_p \in g_p, y_q \in g_q$. Получим градуированную алгебру Ли (т. е. градуированное векторное пространство, наделенное такой структурой алгебры Ли, что $[h_i h_j] \subset h_{i+j}$ для всех $i, j \in Z$). Градуированная алгебра является *транзитивной*, если $h_{-p} = \{0\}$ для всех $p > 1$ и из $x \in h_p$ и $[x, h_{-1}] = \{0\}$ следует, что $x = 0$ (см. работы Танаке [1, 2]).

Пусть $h_{-1} = V$, $\dim V = 3$. Определим структуру транзитивной градуированной алгебры Ли на $h(V) = V \otimes S(V^*)$ следующим образом. Пусть $h_p(V) = V \otimes S^{p+1}(V^*)$ для всех $p \in Z$. Тогда, очевидно, $h_p(V) = \{0\}$ для $p \le -2$ и $h_{-1}(V)$ можно отождествить с V. Пусть x, y, z – базис V^*, а $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ – дуальный базис V. Тогда элементы $S^p(V^*)$ можно описать полиномами степени p от x, y, z. Таким образом, $h(V)$ – пространство полиномиальных векторных полей, что позволяет наделить его структурой алгебры Ли. Легко проверить, что структура алгебры Ли согласована с градуировкой, т. е. $h(V)$ – градуированная алгебра Ли. При этом $h_0(V)$ является подалгеброй в $h(V)$ и может быть естественным образом отождествлена с $gl(V)$.

Любая транзитивная градуированная алгебра может быть отождествлена с некоторой градуированной подалгеброй алгебры Ли $h(V)$, для которой $h_{-1} = h_{-1}(V)$. Для нахождения всех таких подалгебр применим следующий алгоритм классификации.

1. Описать с точностью до сопряженности все подалгебры $h_0 \subset h_0(V) = gl(3, R)$. Перейти к шагу 3.

2. Пусть для некоторого $k \in N$ построена последовательность подпространств $h_i \subset h_i(V)$ такая, что $[h_i h_j] \subset h_{i+j}$ для всех $i, j, i+j \le k$. Описать подпространства h_{k+1} в $h_{k+1}(V, h_0,\dots,h_k) = \{x \in h_{k+1}(V) \mid [x,V] \subset h_k\}$ такие, что $\widetilde{h}_{k+1}(V,h_0,\dots,h_k) = \bigoplus_{i+j=k+1, 1\le i,j\le k} [h_i, h_j] \subset h_{k+1}$ и алгебра $\widetilde{h}(V,h_0,\dots,h_{k+1})$ конечномерна. Все подпространства $h_p \subset h_p(V)$ инвариантны относительно естественного действия h_0 на $h_p(V)$ для $p \ge 1$.

3. Найти подалгебры $\widetilde{h}(V,h_0,\dots,h_{k+1})$ и $h(V,h_0,\dots,h_{k+1})$. Если они не совпадают, то перейти к шагу 2. Иначе подалгебра $h = \widetilde{h}(V,h_0,\dots,h_{k+1}) = h(V,h_0,\dots,h_{k+1})$ является одной из искомых.

Случай, когда подалгебра $h_0 \subset h_0(V)$ не имеет двумерных инвариантных подпространств, описан в работе [4].

Все возможные подалгебры $h_0 \subset h_0(V)$, не имеющие одномерных инвариантных подпространств (но имеющие двумерные), описаны в следующей лемме.

Лемма. Любая подалгебра h_0 в $gl(3,R)$, не имеющая одномерных инвариантных подпространств, но имеющая двумерные, сопряжена одной и только одной из следующих под алгебр:

1. $\begin{pmatrix} \lambda x & x & z \\ -x & \lambda x & y \\ 0 & 0 & \mu x \end{pmatrix}$ $\lambda \ge 0, \mu = 0$ или $\mu > 0$;

2. $\begin{pmatrix} \lambda x & x & u \\ -x & \lambda x & z \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ $\lambda \ge 0$; 3. $\begin{pmatrix} y & x & u \\ -x & y & z \\ 0 & 0 & \lambda x+\mu y \end{pmatrix}$ $\lambda \ge 0$;

4. $\begin{pmatrix} x & y & u \\ z & -x & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} x & y & v \\ -y & x & u \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} x & z & v \\ u & y & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} \lambda x+y & z & v \\ u & \lambda x-y & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} x & u & t \\ v & y & w \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

Здесь переменные обозначены латинскими буквами и должны принадлежать R, а параметры – греческими буквами. Подалгебры с различными значениями параметров не сопряжены друг с другом.

Доказательство леммы см. в работе [5].

Замечание. Подалгебры 1, 2, 3 и 5 являются разрешимыми и имеют инвариантные подпространства над полем C.

Случай, когда подалгебра h_0 неразрешима, аналогичен описанному в работе [4].

Используя приведенный выше метод для классификации градуированных подалгебр g в $gl(V)$ таких, что $\dim h_{-1} = 3$, получаем:

Теорема. *Любая конечномерная транзитивная градуированная алгебра h над полем R такая, что $\dim h_{-1} = 3$ и h_0 разрешима и не имеет одномерных инвариантных подпространств, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:*

1) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y},\ z\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, $\lambda \approx -\lambda$, $k=1, 2,\dots$.

2) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ (\lambda x- y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y} + \mu z\frac{\partial}{\partial z}, z^k\frac{\partial}{\partial x}, z^k\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, $k=1,2,\dots$, $(\lambda,\mu) \approx (-\lambda,-\mu)$.

3) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \mu z\frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda z\frac{\partial}{\partial z}, z^k\frac{\partial}{\partial x}, z^k\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, $\lambda \approx -\lambda$, $k=1,2,\dots$.

4) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{n}z\frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda z\frac{\partial}{\partial z},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y},\ nzx\frac{\partial}{\partial x} + nzy\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, $k=1, 2,\dots, n$.

5) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, $k=1, 2,\dots$.

6) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\ x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial x}, z^k\frac{\partial}{\partial y},\ z\frac{\partial}{\partial z},\ nzx\frac{\partial}{\partial x} + nzy\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, $k=1, 2,\dots, n$, $n=1, 2,\dots$.

Имеем алгебру $\langle (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$, $\lambda \approx -\lambda$. Опишем все конечномерные подмодули в $\langle f(z)\frac{\partial}{\partial x}, \quad g(z)\frac{\partial}{\partial y}\rangle$, $f,g\in C^{\infty}(R)$. Если $f(z)\frac{\partial}{\partial x}+ g(z)\frac{\partial}{\partial y}$ принадлежит инвариантному подмодулю, то ему принадлежит и $f^{(n)}(z)\frac{\partial}{\partial x}+ g^{(n)}(z)\frac{\partial}{\partial y}$. В силу конечномерности подмодуля для некоторого n

$$f^{(n)}(z)\frac{\partial}{\partial x}+g^{(n)}(z)\frac{\partial}{\partial y}=-c_0\left(f(z)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+g(z)\frac{\partial}{\partial y}\right)-\ldots-c_{n-1}\left(f^{(n-1)}(z)\frac{\partial}{\partial x}+g^{(n-1)}(z)\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

т. е. если через $p(t)$ обозначить многочлен $t^n+c_{n-1}t^{n-1}+\ldots+c_0$, а через. $V(p)$ — пространство решений соответствующего дифференциального уравнения, то $f(z),g(z)$ принадлежат $V(p)$.

Пусть $p(t)$ — многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условию: если $f(z)\frac{\partial}{\partial x}+$ $+g(z)\frac{\partial}{\partial y}$ принадлежит инвариантному подмодулю, то $f(z),g(z)$ принадлежат $V(p)$ (например, в качестве $p(t)$ можно взять наименьшее общее кратное многочленов базисных векторов инвариантного подмодуля). Для каждого $p(t)$ есть максимальный подмодуль $\left\langle f(z)\frac{\partial}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$, $f,g\in V(p)$. Найдем в нем инвариантные подпространства относительно $\left\langle (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$. Искомые пространства имеют вид

$$\left\langle z^{jk}e^{w_k z}, iz^{jk}e^{w_k z}\right\rangle,\ w=\alpha\pm\beta i,\ l\le k,\ k=1,2,\ldots,$$

$$u(z)\mapsto \operatorname{Re}u(z)\frac{\partial}{\partial x}+\operatorname{Im}u(z)\frac{\partial}{\partial y},\ j=0,1,\ldots,l.$$

Таким образом, получили алгебру

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},(\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left. z^{jk}e^{w_k z}, iz^{jk}e^{w_k z}\right\rangle,\ w=\alpha\pm\beta i,\ \lambda\approx-\lambda,$$

$$u(z)\mapsto \operatorname{Re}u(z)\frac{\partial}{\partial x}+\operatorname{Im}u(z)\frac{\partial}{\partial y},\ j=0,1,\ldots,l,$$

$$l\le k,\ k=1,2,\ldots.$$

Аналогично находятся подмодули для алгебры $\left\langle x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$. Получаем

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left. z^{jk}e^{w_k z}, iz^{jk}e^{w_k z}\right\rangle,\ w=\alpha\pm\beta i,\ l\le k,\ k=1,2,\ldots,$$

$$u(z)\mapsto \operatorname{Re}u(z)\frac{\partial}{\partial x}+\operatorname{Im}u(z)\frac{\partial}{\partial y},\ j=0,1,\ldots,l.$$

Инвариантному слоению на многообразии M в терминологии алгебр Ли соответствует тройка $g\supset a\supset g_0$, где a — подалгебра в g. Для найденных выше алгебр Ли укажем слоения $co\dim_g a=1$ и выпишем действие на слое (a,g_0) и на факторе (g,a). Получаем

$$1)\, g=\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},(\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\right.$$

$$\left. z^k\frac{\partial}{\partial x},z^k\frac{\partial}{\partial y},z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,$$ $\lambda\approx-\lambda$, $k=1,2,\ldots$, инвариантное слоение $E=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$, $g=a+\frac{\partial}{\partial z}$, $a=$

$$=\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\ (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+\ (x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\right.$$

$$\left. z^k\frac{\partial}{\partial y},\ z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,\ g_0=\left\langle (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\right.$$

$\left. z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y},\ z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^k\frac{\partial}{\partial x},z^k\frac{\partial}{\partial y},z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},(\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$ $\left.+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$.

Аналогично

$2)$ $g=a+\frac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y}+\right.$ $\left.+\mu z\frac{\partial}{\partial z},\ z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^k\frac{\partial}{\partial x},\ z^k\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)=a$ при $\mu=0$ и

$(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\mu\neq 0$;

3) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\mu z\dfrac{\partial}{\partial z},\right.$ $\left. x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda z\dfrac{\partial}{\partial z},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)=a$ при $\mu=\lambda=0$ и $(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\mu\neq 0,\lambda\neq 0$, $(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},\right.$ $\left. z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\mu\neq 0,\lambda=0$, $(g,a)=$ $=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\mu=0,\lambda\neq 0$;

4) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{2}{n}z\dfrac{\partial}{\partial z},\right.$ $x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda z\dfrac{\partial}{\partial z},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ nzx\dfrac{\partial}{\partial x}+$ $\left.+nzy\dfrac{\partial}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=$ $=\left\langle z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ nzx\dfrac{\partial}{\partial x}+nzy\dfrac{\partial}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)==\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial y}-\right.$ $\left.-y\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\lambda=0$, $(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ при $\lambda\neq 0$;

5) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},\right.$ $\left. z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ z\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ z\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\right.$ $\left. x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

6) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},\right.$ $\left. z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ z\dfrac{\partial}{\partial z},\ nzx\dfrac{\partial}{\partial x}+nzy\dfrac{\partial}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\right.$ $\left. z^k\dfrac{\partial}{\partial y},\ z\dfrac{\partial}{\partial z},\ nzx\dfrac{\partial}{\partial x}+nzy\dfrac{\partial}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$, ядро неэффективности $(g,a)=\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\ x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\right.$ $\left. x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial x},\ z^k\dfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

7) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle (\lambda x-y)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\dfrac{\partial}{\partial y},\right.$ $\left. z^{j_k}e^{w_k z}, iz^{j_k}e^{w_k z} \right\rangle$, $j_k\neq 0$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^{j_k}e^{w_k z}, iz^{j_k}e^{w_k z} \right\rangle$, $j_k\neq 0$, ядро неэффективности $(g,a)=a$;

8) $g=a+\dfrac{\partial}{\partial z}$, $g_0=\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y},\ -y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y},\right.$ $\left. z^{j_k}e^{w_k z},\ iz^{j_k}e^{w_k z} \right\rangle$, $j_k\neq 0$, ядро неэффективности $(a,g_0)=\left\langle z^{j_k}e^{w_k z}, iz^{j_k}e^{w_k z} \right\rangle$, $j_k\neq 0$, ядро неэффективности $(g,a)=a$.

Методы, изложенные в работе, могут также быть использованы и в бесконечномерном случае.

Литература

1. Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups.— J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970). – P. 1–82.

2. Tanaka N. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.— Hokkaido Math. J., 8 (1979). – P. 23–84.

3. Yamaguchi R. Differential systems associated with simple graded Lie algebras — Adv. Studies in Pure Math., v. 22 (1993). – P. 413–494.

4. Можей Н.П. Градуированные транзитивные алгебры Ли // Труды БГТУ. Серия VI. Физ.-мат. науки и информ. — 2004. — Вып. XII. — С. 9–14.

5. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhei N., et~al. Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces — Preprint / Univ. Oslo, Oslo., 1993, N. 35. – 160 p.