$$D_o = \frac{1}{2d}\sum_{i}\sum_{j=i}\mathbf{a}_{ij}^2 \sum_{\{P_{N-2}^{n-1}\}} \widetilde{W}_{ij}(\mathbf{q}_i, 0j; \mathbf{q}_\alpha, \ldots, \mathbf{q}_\xi) F_{n+1}(\mathbf{q}_i, 0j; \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta, \ldots, \mathbf{q}_\xi). \quad (23)$$

Общие соотношения (18) - (22) или (23) сводят задачу нахождения коэффициента самодиффузии к процедуре равновесного усреднения микроскопических вероятностей перехода и составляют основу для дальнейших вычислений в рамках конкретных моделей неоднородных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flinn C.P. Point defects and diffusion. - Oxford: Clarendon Press, 1972.
2. Allnatt A.R., Lidiard A.B. Statistical theories of atomic transport in crystalline solids // Rep. Progr. Phys. - 1987. - V.50. - P.373 - 472.
3. Zaluska-Kotur M.A., Turski L.A. Diffusion in disordered medium // Phys. Rev. B. - 1994. - V.50, no.21. - P.16102 - 16104.
4. Wert C.A., Zener C. Interstitial atomic diffusion coefficients // Phys. Rev. - 1949. - V.76, no.8. - P.1169 - 1175.
5. Vineyard G.H. Frequency factors and isotope effects in solid state rate processes // Journ. Phys. Chem. Solids. - 1957. - V.3, no.1/2. - P.121 - 127.
6. Glyde H.R. Rate processes in solids // Rev. Mod. Phys. - 1967. - V.39, no.2. - P.121 - 127.
7. Вихренко В.С. К статистической теории диффузии в твердых телах // Докл. Акад. наук БССР. - 1985. - Т.29, № 3. - С.219 - 221.
8. Jacucci G., de Lorenzi G., Marchese M., Flinn C.P., Toller M. Theory of classical diffusion jump in solids // Phys. Rev. B. - 1987. - V.36, no.6. - P.3086 - 3094.

УДК 532.517.2 : 532.62

А.М.Волк., ст. преподаватель

ПЛЕНОЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗАКРУЧЕННОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА

A two-phase film movement of viscous liquid at the cylinger surface was elaborated. The exact automodel solution of the Navier-Stokes equation for axis and axial component of velocity was considered. The hydrodynamic characteristics and regime of stream was received.

Пленочные течения широко используются в газожидкостных реакторах, тепломассообменных аппаратах и других технических устройствах [1-4]. Гидродинамика пленочных течений имеет важное значение при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических устройств. В двухфазных потоках возникает необходимость исследования устойчивости движения при противотоке жидкой пленки и газового потока. Теоретические и экспериментальные исследования гидродинамики двухфазных течений позволяют расширить область применения жидких пленок и интенсифицировать в них процессы тепломассопереноса.

Анализ результатов исследования пленочных течений выполнен в ряде работ [5-6]. Показано, что в достаточно широком диапазоне изменения числа Рейнольдса (до 2100) установившееся пленочное течение является автомодельным и модели ламинарного пленочного движения достаточно точны при определении средних характеристик.

Рассмотрим установившееся осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости в двухфазном потоке по внутренней стенке вертикального цилиндра. Ось z цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндра.

Запишем уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}=0.$$

В силу осесимметричности $\frac{\partial}{\partial \varphi}\equiv 0$. Принимая $v=0$, из данного уравнения неразрывности получим $\frac{\partial u}{\partial z}=0$. Для осесимметричного установившегося пленочного течения при этих условиях решение уравнений Навье - Стокса будет автомодельным, т. е. скорость пленки будет только функцией радиуса $u=u(r)$, $w=w(r)$.

При ламинарном движении и при исследовании средних характеристик не учитывается перепад давления, создаваемый капилярными силами поверхностного натяжения. В этом случае уравнение Навье-Стокса для осевой составляющей скорости принимает вид

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)\right)+\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и заданы касательные напряжения на границе раздела фаз газ - жидкость. Тогда граничными условиями будут:

$$u\big|_{r=R}=0; \quad \mu\frac{du}{dr}\bigg|_{r=R-\delta}=-\tau_z. \tag{2}$$

Принимаем $\psi=\frac{\partial p}{\partial z}=const$, интегрируем уравнение (1) и находим

$$u = c_1 \ln r - \frac{\rho g - \psi}{4\mu} r^2 + c_2 .$$

Из условия прилипания, выполнив переход к безразмерным переменным $\tilde{r} = \frac{r}{R}$, $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{R}$, получим

$$u = c_1 \ln \tilde{r} + \frac{\rho g - \psi}{4\mu} R^2 (1 - \tilde{r}^2).$$

Из граничного условия

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R-\delta} = \left.\frac{du}{Rd\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = \left.\frac{1}{R}\left(\frac{c_1}{\tilde{r}} - \frac{\rho g - \psi}{2\mu} R^2 \tilde{r}\right)\right|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{\tau}{\mu}$$

находим

$$c_1 = -\frac{\tau_z R(1-\tilde{\delta})}{\mu} + \frac{\rho g - \psi}{2\mu} R^2 (1-\tilde{\delta})^2 .$$

Условия равновесия сил $\pi\left(R-\delta\right)^2 \Delta P = 2\pi\left(R-\delta\right) l \tau_z$, действующих на газовый поток [4], дают возможность заменить перепад давления касательными напряжениями сил трения на границе раздела фаз:

$$\frac{\Delta p}{l} = \psi = -\frac{2\tau_z}{R(1-\tilde{\delta})}; \quad c_1 = \frac{\rho g R^2}{2\mu}(1-\tilde{\delta})^2 .$$

При этом осевая скорость в пленке жидкости будет

$$u = \frac{\tau_z \rho}{2\mu(1-\tilde{\delta})}(1-\tilde{r}^2) + \frac{\rho g R^2}{4\mu}[2(1-\tilde{\delta}^2)\ln \tilde{r} + 1 - \tilde{r}^2].$$

Найдем объемный расход жидкой фазы по площади поперечного сечения пленки, отнесенный к единице периметра цилиндра:

$$q = \frac{\iint u r dr d\varphi}{2\pi r} = \frac{1}{R}\int_{R-\tilde{\delta}}^{R} u r dr = R \int_{1-\tilde{\delta}}^{1} u \tilde{r} d\tilde{r} .$$

Выполнив интегрирование, получим

$$q = \frac{\tau_z R^2}{2\mu(1-\tilde{\delta})}\left.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}^{\tilde{r}=1} + \frac{\rho g R^3}{4\mu}\left[(1-\tilde{\delta})^2 \tilde{r}^2 \ln\tilde{r} - (1-\tilde{\delta})^2\frac{\tilde{r}^2}{2} + \frac{\tilde{r}^2}{2} - \frac{\tilde{r}^4}{4}\right]_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}^{\tilde{r}=1} =$$

$$= \frac{\tau_z R^2}{8\mu}\left[\frac{1}{1-\tilde{\delta}} + (1-\tilde{\delta})^3 + 2(1-\tilde{\delta})\right] + \frac{\rho g R^3}{4\mu}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1-\tilde{\delta})^4 - (1-\tilde{\delta})^2 - (1-\tilde{\delta})^4 \ln(1-\tilde{\delta})\right]$$

Данное уравнение однозначно определяет среднюю толщину пленки при заданном расходе жидкой фазы и известных касательных напряжениях на границе раздела фаз. Гравитационное течение [5] имеет место при $\tau_z=0$.

Разлагая функции в степенной ряд, находим

$$q=\frac{\tau_z\delta^2}{2\mu}\frac{1-\tilde{\delta}+\tilde{\delta}^2/4}{1-\tilde{\delta}}+\frac{\rho g\delta^3}{3\mu}\left[1-\tilde{\delta}+\frac{3}{20}\tilde{\delta}^2+\frac{1}{5}\tilde{\delta}^3+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{24(k-2)!}{(k+2)!}\tilde{\delta}^k\right]. \quad (3)$$

Для анализа пленочного течения найдем скорость пленки на границе раздела фаз и градиент скорости

$$u\big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}=\frac{\tau_z R}{2\mu}\left(\frac{1}{1-\tilde{\delta}}-1+\tilde{\delta}\right)+\frac{\rho g R^2}{4\mu}[2(1-\tilde{\delta})^2\ln(1-\tilde{\delta})+1-(1-\tilde{\delta})^2]=$$

$$=\frac{{}_z\tau\delta}{\mu}\cdot\frac{1-\tilde{\delta}^2/2}{1-\tilde{\delta}}+\frac{\rho g\delta^2}{\mu}\left[\frac{1}{2}-\frac{\tilde{\delta}}{3!}-\frac{\tilde{\delta}^2}{4!}-\cdots-\frac{(k-1)!}{(k+2)!}\tilde{\delta}^k\right];$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{Rd\tilde{r}}=-\frac{\tau_z\tilde{r}}{\mu(1-\tilde{\delta})}+\frac{\rho gR}{2\mu}\left[\frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\tilde{r}}-\tilde{r}\right].$$

Касательные напряжения на стенке будут

$$\tau_{R-\delta}=\mu\frac{du}{Rd\tilde{r}}\bigg|_{\tilde{r}=1}=-\frac{\tau}{\mu(1-\tilde{\delta})}-\frac{\rho g\delta}{\mu}\left(1-\frac{\tilde{\delta}^2}{2}\right).$$

Аналогично получается автомодельное решение для закрученного пленочного течения. Считаем, что трансверсальная составляющая скорости зависит лишь от радиуса $w=w(r)$. В этом случае имеем уравнение

$$\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)=0$$

и получим решение

$$w=c_1\tilde{r}+\frac{c_2}{\tilde{r}}\ . \quad (4)$$

Используем граничные условия

$$w\big|_{z=1}=0;\quad \tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{w}{\tilde{r}}\right)\bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}=-\frac{R\,\tau_\varphi}{\mu},$$

находим произвольные постоянные и получим трансверсальную составляющую скорости

$$w=\frac{R\tau_\varphi(1-\tilde{\delta})}{2\mu}\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\tilde{r}\right).$$

Найдем среднее значение трансверсальной составляющей скорости

$$\langle w\rangle=\frac{1}{\tilde\delta}\int\limits_{1-\tilde\delta}^{1} w\,d\tilde r=\frac{1}{\tilde\delta}\frac{K\tau\varphi}{2\mu}\left[\frac{(1-\tilde\delta)^4}{2}-\frac{(1-\tilde\delta)^2}{2}-(1-\tilde\delta)\ln(1-\tilde\delta)\right]=$$

$$=\frac{\tau_\varphi\delta}{2\mu}\left[1-\frac{10}{3!}\tilde\delta+\frac{14}{4!}\tilde\delta^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2(k-1)!}{(k+2)!}\tilde\delta^k\right].$$

Рассмотрим течение по внешней стенке цилиндра. Граничные условия и условие равновесия на границе раздела фаз

$$u\big|_{\tilde r=1}=0;\quad \mu\frac{du}{Rd\tilde r}\bigg|_{\tilde r=1+\tilde\delta}=\tau_z;\quad \psi=\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{2\tau_r}{R(1+\delta)}$$

дают возможность получить решение для осевой составляющей скорости

$$u=\frac{\tau_z R}{2\mu(1+\tilde\delta)}(r^2-1)+\frac{\rho g R^2}{4\mu}[2(1+\tilde\delta)^2\ln\tilde r+1-\tilde r^2].$$

Интегрируя, получим расход жидкой фазы на единицу длины периметра:

$$q=R\int\limits_{1}^{1+\tilde\delta}u\tilde r\,d\tilde r=\frac{\tau_z R}{8\mu}\left[(1+\tilde\delta)^3-2(1+\tilde\delta)+\frac{1}{1+\tilde\delta}\right]+$$

$$+\frac{\rho g R^3}{4\mu}\left[(1+\tilde\delta)^4\ln(1+\tilde\delta)+(1+\tilde\delta)^2-\frac{3}{4}(1+\tilde\upsilon)^4-\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\frac{\tau_z\delta^2}{2\mu}\frac{1+\tilde\delta-\dfrac{\tilde\delta^2}{4}}{1+\tilde\delta}+\frac{\rho g\delta^3}{3\mu}\left[1+\tilde\delta+\frac{3}{20}\tilde\delta^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k 24(k-2)!}{(k+2)!}\tilde\delta^k\right].$$

Скорость пленки на границе раздела фаз, градиент скорости и касательные напряжения на стенке будут

$$u\big|_{\tilde r=1+\tilde\delta}=\frac{\tau_z R}{2\mu(1+\tilde\delta)}((1+\tilde\delta)^2-1)+\frac{\rho g R^2}{4\mu}[2(1+\tilde\delta)^2\ln(1+\tilde\delta)+1-(1+\tilde\delta)^2]=$$

$$=\frac{\tau_z\,\delta(1+(\tilde\delta^2/2))}{\mu(1+\tilde\delta)}+\frac{\rho g\delta^2}{2\mu}\left[1+\frac{\tilde\delta}{3}-\frac{\tilde\delta^2}{12}+\frac{(-1)^{k+1}2}{k(k+1)(k+2)!}\tilde\delta^k\right];$$

$$\frac{du}{dr}\bigg|_{r=R}=\frac{du}{Rd\tilde r}\bigg|_{\tilde r=1}=\frac{\tau_z}{\mu(1+\tilde\delta)}+\frac{\rho g\delta}{\mu}\left(1+\frac{\tilde\delta^2}{2}\right);$$

$$\tau\big|_{r=R}=\frac{\tau_z}{1+\tilde\delta}+\rho g\delta\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right).$$

Для закрученной пленки на внешней стенке цилиндра из решения (3), используя граничные условия

Для закрученной пленки на внешней стенке цилиндра из решения (3), используя граничные условия

$$w\big|_{\tilde r=1}=0,\quad \tilde r\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left(\frac{w}{\tilde r}\right)\bigg|_{\tilde r=1+\tilde\delta}=\frac{R\tau_\varphi}{\mu},$$

получим трансверсальную составляющую скорости:

$$w=\frac{R\tau_\varphi(1+\tilde\delta)^2}{2\mu}\left(\tilde r-\frac{1}{\tilde r}\right)$$

и ее среднее значение

$$\langle w\rangle=\frac{1}{\tilde\delta}\frac{\tau_\varphi\delta}{2\mu}\left[\frac{(1+\tilde\delta)^4}{2}-\frac{(1+\tilde\delta)^2}{2}-(1+\tilde\delta)^2\ln(1+\tilde\delta)\right]=$$

$$=\frac{\tau_\varphi\delta}{2\mu}\left[1+\frac{10}{3!}\tilde\delta+\frac{14}{4!}\tilde\delta^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k-1)!}{(k+2)!}\tilde\delta^k\right].$$

На основании полученных зависимостей получим расчетные режимы течения пленки, которые зависят от величины и направления составляющих тензора касательных напряжений сил трения на границе раздела фаз τ_z,τ_φ, расхода q жидкой фазы, радиуса цилиндра R. При известных значениях данных величин из уравнения (3) или (5) находим относительную толщину пленки на внутренней или внешней стороне цилиндрической поверхности. Затем по соотношению касательных напряжений τ_z, расхода q, скорости пленки на границе раздела фаз $u\big|_{\tilde r=1\pm\tilde\delta}$ и градиента скорости на стенке $du/d\tilde r\big|_{\tilde r=1}$ получим режимы течения:

нисходящий прямоток $q>0; u\big|_{\tilde r=1\pm\tilde\delta}>0$;

восходящий прямоток $q>0; u\big|_{\tilde r=1\pm\tilde\delta}<0$;

восходящий противоток $q<0$;

режим захлебывания $q\approx 0$.

При достаточно малых значениях относительной толщины пленки более простые соотношения получаем при замене величин первыми членами степенного ряда, выражения в скобках. Данные соотношения соответствуют модели течения по плоской поверхности.

Режим захлебывания получаем из решения уравнения $q=0$. В этом случае резко возрастает толщина пленки, что соответствует реальному физическому явлению: накоплению жидкой фазы.

Характер зависимостей (3) и (5) показывает, что знак q не зависит явно от коэффициента вязкости, так как $1/\mu$ является общим множителем. Данный факт подтвержден экспериментальными исследованиями [5].

Анализ скорости и объемного расхода дает возможность получить характер изменения скорости по толщине пленки в зависимости от соотношения сил трения на границе раздела фаз и массовых сил. Средние характеристики могут быть использованы при исследовании волнообразования. При достаточно малых значениях относительной толщины пленки полагая $\tilde{\delta} = 0$ получаем как частный случай плоское течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики.-1948.- Т.18.-N1.-С.3-28.
2. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики.-1949.-Т.19.-N2.-С.105-120.
3. Стырыкович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В. Теплообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций. - М.:Наука,1982.
4. Соколов В.И., Доманский И.В. Газожидкостные реакторы.-Л.:Машиностроение, 1976.
5. Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М. Теплообмен в жидких пленках.-К.: Техника,1972.
6. Уоллис Г.Б. Одномерные двухфазные течения.-М.:Мир, 1972.

УДК 536.758

И.И.Наркевич, профессор;
С.И.Лобко, доцент;
А.В.Жаркевич, аспирант;
В.Н.Хроль, студент

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ТИПА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА ДЛЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ, ЖИДКОЙ И ГАЗООБРАЗНОЙ ФАЗ

The equation of state for all phases of a molecular system is formulated in the framework of the lattice model.

1. Введение. Давней и пока еще не осуществившейся мечтой теоретиков, работающих в области равновесной молекулярной статистической физики, является получение всефазного уравнения состояния простого (молекулярного) вещества, т.е. такого уравнения, которое бы описывало