УДК 620.1 + 539.4

Каледина Н. Б., старший преподаватель

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Statistical methods of research of composite materials reliability are considered. It is offered two types of distribution: normal and Vejbulla for research of composite durability. Lognormal distribution is offered for the description of durability values disorder. The probability of destruction of a layered composite with a round aperture is determined.

Значение композиционных материалов для полиграфического производства велико, так как их применение связано с решением ряда технологических проблем, важных для успешного развития и повышения технического уровня производства. Композиты заняли прочное место при изготовлении флексографских форм, в печатных и переплетно-брошюровочных процессах как материалы, обладающие рядом ценных физико-химических свойств.

К наиболее важным свойствам, имеющим значение для полиграфии, относятся:

— небольшой удельный вес;

— высокая механическая прочность, которая обеспечивает тиражеустойчивость;

— высокая стойкость почти всех композиционных материалов к воде и химическим реактивам;

— хорошие оптические свойства и способность образовывать тонкие пленки;

— возможность их переработки простыми методами: прессованием, литьем под давлением, механической обработкой.

Использование композиционных материалов дает возможность регламентировать, механизировать и автоматизировать сложные технологические процессы, прежде всего благодаря однородности их постоянных свойств, которые по мере надобности можно регулировать в определенном интервале.

Надежность композита может рассматриваться как вероятность того, что его несущая способность превосходит действующую нагрузку, т. е. прочность материала превышает величину действующих напряжений.

Для оценки этой надежности необходимо знать распределение минимальных значений напряжений в выборке объемом n (при больших n). Статистические зависимости, определяющие распределение минимальных значений, могут быть представлены уравнениями (1)–(4). Если интегральная функция распределения описывается в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,, \tag{1}$$

где $f(x)$ — плотность вероятности непрерывной функции $F(x)$, то распределение минимальных значений в выборке объемом n из генеральной совокупности описывается функцией плотности вероятности

$$g_n(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}, \tag{2}$$

имеющей интегральную функцию распределения

$$G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} g_n(x)dx = 1 - [1 - F(x)]^n\,. \tag{3}$$

Наиболее вероятное значение (мода) минимальной величины в выборке n соответствует максимуму функции плотности вероятности $g_n(x)$. Если решение существует, то оно может быть записано в виде

$$f^2(x_n^*)(n-1) = [f'(x_n^*)][1 - F(x_n^*)]\,. \tag{4}$$

Это уравнение в явной и неявной форме используется исследователями, имеющими дело с теорией слабейшего звена.

При исследовании прочности композитов обычно используют два типа распределения: нормальное и Вейбулла, а логарифмически нормальное применяют при описании разброса значений долговечности, например, при определении числа циклов до разрушения.

Вейбулл предположил [1], что вероятность разрушения в единице объема описывается следующей функцией:

$$F_0(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right], \tag{5}$$

где α и β — параметры, определяемые из испытаний материала, а x — действующее напряжение.

Это распределение использует гипотезу слабейшего звена. В обоих распределениях легко подсчитать моду (максимум) в распределении прочности объемом n.

Прочность образцов можно описать распределением минимальных значений, представленном в табл. 1.

В табл. 1 x — напряжение; σ — средняя квадратичная ошибка; α — параметр формы; β — параметр положения.

Таблица 1

Сравнение распределений Гаусса и Вейбулла

Распределение	Функция	Диапазон	Расположение моды	Параметр формы
Нормальное (Гаусса)	$\exp\left[-0{,}5\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right]$	$(-\infty, \infty)$	$\bar{x}$	$\frac{\sigma}{x}$
Вейбулла	$\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$	$(0, \infty)$	β	α

Если случайная величина $X > 0$ характеризует напряжение разрушения или время до разрушения, то вероятность разрушения $p[X \le x] \equiv F(x)$. Она равна нулю при $x < 0$ и уравнению (5) при $x \ge 0$.

Параметр положения β в уравнении (5) называется характерным временем или напряжением. Он больше нуля и определяет точку на распределении, соответствующую $100 / (1 - e)$ процентной вероятности. Параметр α также положительный, он определяет форму кривой. Чем меньше α, тем больше разброс (дисперсия σ^2) данных в распределении. Во многих испытаниях долговечность α не зависит от уровня напряжений x.

При определении прочности или долговечности композитов используется оценка функции надежности $R(x)$, пропорциональной числу образцов из генеральной совокупности, которые могут выдержать напряжение x или время до разрушения, т. е. $R(x) = p[X > x] = 1 - F(x)$ или

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]. \tag{6}$$

Во многих случаях устанавливается требуемый срок службы или несущая способность по напряжениям x_0 и требуется определить надежность при x_0. В других случаях задается надежность (вероятность безотказной работы) и требуется дать оценку времени, при котором R % изделий сохраняет работоспособность.

Величина x_R может быть найдена из формулы (7):

$$x_R = \beta\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right]^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Результаты испытаний графитоэпоксидных композитов, полученных в работе [2], показывают, что параметры формы α и положения β зависят от ориентации слоев и вида прорези (см. табл. 2).

Из этой таблицы видно, что надрезы уменьшают прочность образцов без существенного изменения формы её распределения α.

Следует принять во внимание, что на статистические характеристики прочности существенное влияние может оказывать форма образцов. При продольной ориентации волокон (0°) параметр β оказывается различным для разных типов образцов, в то же время параметр формы α практически одинаков (для образцов без надрезов) Аналогичное заключение относится и к образцам с поперечным формированием.

Технические факторы, влияющие на репрезентативные значения α и β, могут перекрываться и взаимодействовать друг с другом. Поэтому следует учитывать следующее:

— на параметр α оказывают сильное влияние качество контроля технологического процесса изготовления материала, характер первичного разрушения, размеры образца и метод испытания; меньшее влияние оказывает ориентация волокон (при условии, что не изменяется характер первичного разрушения); условия испытания и надрезы;

Таблица 2

Параметры распределения Вейбулла для слоистых композитов при растяжении

Ориентация слоев	Параметр формы α	Параметр положения β	Первичное разрушение
0	10,11	10 650	Волокна
0/90	10,91	5360	Волокна
0/±45	10,80	4880	Волокна
0/±45/90	11,46	3450	Волокна
0/±45/90 с круглым отверстием	11,50	2740	Волокна
0/±45/90 с прорезью	10,80	2780	Волокна
90	7,54	370	Матрица

— на параметр β сильное влияние оказывают свойства компонент (матрицы и волокон), ориентация слоев и изменение условий испытания, менее сильное — способ переработки материала и метод испытания.

Эти выводы характеризуют лишь общую тенденцию, всегда возможны исключения из них. Кроме того, на α и β заметное влияние могут оказывать и другие неотмеченные факторы, поэтому при любом анализе необходимо тщательно устанавливать все вероятные причины изменения измеряемых показателей свойств.

Успешная оценка надежности возможна лишь при определении параметров распределения. Если для нормального распределения определение его параметров ($\bar{x}$ и σ) не представляет особого труда, то для распределения Вейбулла при известном параметре формы α (для композитов величина α обычно с определенной достоверностью известна) трудности возникают при расчете параметра β. Этот параметр можно записать в виде

$$\hat{\beta} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m} \beta_{i(n)}\right]^{1/\alpha}, \tag{8}$$

где n относится к выборке объемом n, а $\beta_{i(n)}$ ($i = 1,2...m$) — к первым m испытанным образцам.

Верхняя граница достоверности β с уровнем доверия $1 - p$ (нижняя граница достоверности уровнем достоверности p) определяется по формуле (9)

$$\bar{\beta}_{1-p} = \beta_p = \left(\frac{2m}{\chi^2_{2m,p}}\right)^{1/\alpha} \cdot \hat{\beta}, \tag{9}$$

где χ^2 относится к *хи*-квадрат распределению Пирсона с числом степеней свободы $2m$ и интегральной вероятностью p. Интервал между верхней и нижней границами, каждая из которых соответствует достоверности $1 - p$, является интервалом с уровнем достоверности $1 - 2p$. Уравнения (8) и (9) справедливы и при $m = n$, поскольку уравнение в этом случае переходит в выражение для обычных границ достоверности, определяемых на основе данных всех n наблюдений. Параметры распределения Вейбулла можно определять и другими методами [4, 5].

В качестве примера определим вероятность разрушения слоистого композита с круглым отверстием при напряжении $x = 2320$ кгс/см^2 (232 МПа), если известно, что распределение предела прочности этого материала соответствует закону Вейбулла с параметрами $\beta = 2750$ и $\alpha = 11$ (см. табл. 2). Находим соотношение x/в = 0,84. Подставляя эти значения в уравнение (5), получим $F_0(x_0) = 0{,}14$.

Литература

1. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах — М.: Мир, 1980. — 395 с.

2. Halpin J. C. J. Composite Materials, 1972, № 6. C. 208–231.

3. Harter H. L. and Moore A. H., Technometrics 7, 1965, № 3.

4. Статистические методы обработки эмпирических данных. — М.: Изд-во стандартов, 1978. — 232 с.

5. Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б. Модели отказов — М.: Изд-во “Советское радио”, 1966. — 166 с.