УДК 621.9

А.В. Овсянников, доцент

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

In article simulating non-stationary stochastic processes with the set information properties is considered. Simulating of casual process is made on the basis of the stochastic differential equation (SDE). The nonlinear functions which are included in SDE are unequivocally defined by factors which enter into equation FPK. The found expressions for SDE allow to develop block diagrams in system Simulink Matlab for simulating processes with the set non-stationary properties. Examples of simulating are resulted.

Класс нестационарных случайных процессов (НСП) представляет собой наиболее общую и сложную вероятностную модель случайного явления. Для характеристики такого процесса в общем случае необходимо определить последовательность корреляционных функций высших порядков. Исследования могут быть упрощены, если уточнить тип нестационарного процесса.

Нестационарные случайные процессы можно разделить на процессы с медленными нестационарными изменениями, процессы установления, процессы со стационарными приращениями и периодически нестационарные случайные процессы.

В основе наиболее распространенного метода моделирования случайных процессов с заданными характеристиками лежит преобразование некоторого исходного случайного процесса (обычно нормального) с помощью линейной инерционной и нелинейной безынерционной цепей или нелинейной инерционной цепи. Этот метод является частным случаем формирования процессов на основе стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [1]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) + g(t,x)n_x(t), \qquad (1)$$

где для симметризированного СДУ [2] коэффициенты сноса и диффузии определяются через нелинейные функции:

$$a(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}b(t,x), \qquad b(t,x) = \frac{1}{2}N_x g^2(t,x),$$

где N_x – односторонняя спектральная плотность.

Для моделирования нестационарных случайных процессов вида (1) необходимо каким-либо образом определять функции f(t,x) и g(t,x) с учетом задаваемых статистических свойств процесса. Это, в частности, можно сделать через плотность распределения вероятностей (ПРВ) W(t,x). На основе уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова можно получить дифференциальное уравнение в частных производных:

$$f'_x - fz_x + \tfrac{3}{4}b'_x z_x - \tfrac{1}{2}b(z_x^2 - z'_x) - \tfrac{1}{4}b''_x - z_t = 0, \qquad (2)$$

где обозначено

$$f'_x = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \quad b'_x = \frac{\partial b(t,x)}{\partial x}, \quad z_x = \frac{\partial \ln W(t,x)}{\partial x}, \quad z_t = \frac{\partial \ln W(t,x)}{\partial x}.$$

Положим в (2) b=const, тогда уравнение преобразуется к виду

$$f'_x - fz_x - \tfrac{1}{2}b(z_x^2 - z'_x) - z_t = 0.$$

Обозначив $k1(t,x) = -z_x$, а $k2(t,x) = -\frac{1}{2}b(z_x^2 - z_x') - z_t$, получим

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + k1(t,x)f(t,x) + k2(t,x) = 0. \qquad (3)$$

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (3) состоит в нахождении функции $f(t,x) = e^{-\int k1dx}\{C - \int k2e^{\int k1dx}dx\}$. Константа C определяется начальными и граничными условиями для функции f(t,x).

Если о процессе $x(t)$ известна только одномерная ПРВ $W(x)$, уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{2}\frac{d\ln W(x)}{dx} + \sqrt{\frac{2b}{N_x}}n_x(t). \qquad (4)$$

Коэффициент диффузии марковского процесса может быть приближенно определен через заданную корреляционную функцию. Наиболее просто такая задача решается при экспоненциальном характере корреляционной функции.

Моделирование уравнений (1), (4) может быть произведено в системе Simulink MatLab. Адекватность результатов моделирования процесса $x(t)$ может быть оценена построением соответствующих гистограмм [3].

Рассмотрим моделирование периодически нестационарных процессов и процессов с переменной структурой. Воспользуемся представлением функции f(t,x) в виде $f(t,x) = c(t)d(x)$.

Если $g(t,x) = const = g = \sqrt{2b/N_x}$, то функция f(t,x) будет соответствовать коэффициенту сноса a(t,x). С учетом этого уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для случая b=1 примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t,x) = -c(t)\frac{\partial}{\partial t}[d(x)W(t,x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(t,x). \qquad (5)$$

Рассмотрим моделирование НСП, для которых $d(x) = -x(t)$.

Пусть «плавная» смена режима функционирования некоторой системы характеризуется функцией $c(t) = Ce^{-\beta t}$. Тогда СДУ будет выражаться формулой

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ce^{-\beta t}x(t) + gn_x(t).$$

Анализ этого уравнения показывает, что при t=0 процесс соответствует стандартному нормальному процессу. В случае $t \to \infty$ процесс отвечает чисто диффузионному – винеровскому. Среднее значение процесса (математическое ожидание) равно нулю.

Пусть теперь функция c(t) принимает вид $c(t) = C[1 + \mathrm{sign}(t - t_1)]$. Особенность уравнения состоит в том, что при временных значениях $t<t_1$ функция c(t) равна нулю и до момента времени t_1 процесс x(t) является винеровским. При моментах времени $t>t_1$ функция c(t) оказывается равной единице и, следовательно, процесс должен стать нормальным гауссовским. В отличие от рассмотренного выше такой процесс характерен для динамических систем со скачкообразным изменением структуры.

Моделирование периодически нестационарных процессов также будем рассматривать на основе СДУ. Пусть функция c(t) будет являться периодическим процессом. Для простоты рассмотрения примем ее как периодическую последовательность импульсов h(t) с периодом T и длительностью импульса τ. Примем также $h(t) \in [0, a]$. Тогда СДУ периодического нестационарного процесса можно записать в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = -h(t)x(t) + gn_x(t).$$

Анализ результатов моделирования показывает, что в то время, когда h(t)=0, процесс является диффузионным – винеровским, а когда h(t)=a, процесс является нормальным гауссовским. Заметим, что к такого типа процессам также применимо название "процессы с переменной структурой".

Большой интерес представляет случай, когда в качестве функции h(t) выступает псевдослучайная последовательность (ПСП) импульсов. В этом случае НСП становится менее регулярным (квазипериодическим). В качестве такой последовательности можно воспользоваться М-последовательностью. Особенностью последовательности является то, что она является периодической с периодом, состоящим из N импульсов (символов): $N = 2^k - 1$, где k – разрядность устройства, реализующего М-последовательность. Наиболее просто при моделировании ПСП можно реализовать с помощью элементов задержки.

Анализ результатов моделирования показывает, что качественно смысл наличия ПСП в СДУ аналогичен наличию простой периодической последовательности импульсов.

Интерес также представляет моделирование узкополосных случайных процессов с переменными коэффициентами, зависящими от времени. Например, в качестве такого процесса можно рассматривать СДУ второго порядка вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = C_1\frac{dx(t)}{dt} + C_2(t)x(t) + n_x(t).$$

На основе изложенного можно проводить моделирование нестационарных процессов в системе Simulink MatLab. Могут быть разработаны структурные схемы формирующих устройств (фильтров) для моделирования НСП с различными ПРВ. Достоверность моделирования может подтверждаться получением временных реализаций процессов $x(t)$ и построением соответствующих гистограмм.

В качестве примера рассмотрим моделирование периодически нестационарного процесса и процесса с переменной структурой. Для процесса с переменной структурой были выбраны параметры C=0.5, t_1=1000, мощность шума 0,1В^2. Результаты моделирования структуры формирующего фильтра по СДУ представлены на рис. 1. Рисунок содержит два окна. Первое – содержит схему формирующего фильтра, второе – временную реализацию случайного процесса.

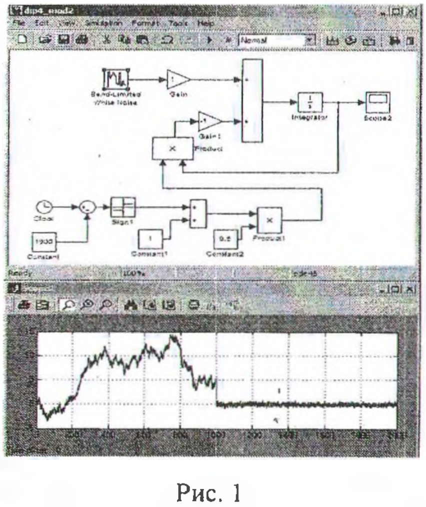

Рис. 1

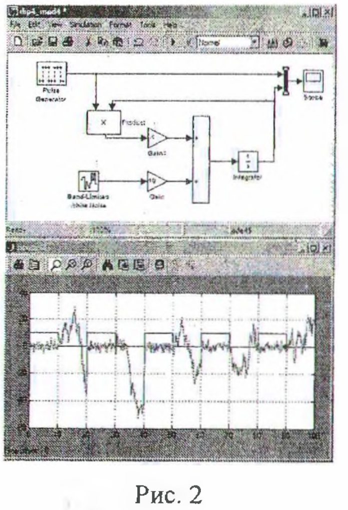

Рис. 2

Результаты моделирования периодически НСП приведены на рис. 2. Рисунок содержит два графических окна. Первое – структуру формирующего фильтра, второе – результаты моделирования: исходный дискретный периодический процесс и процесс на выходе формирующего фильтра x(t). При моделировании выбирались следующие параметры. Для генератора, реализующего функцию h(t): амплитуда – 10, период – 20, длительность импульса – 10. Мощность шума 1 $В^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.
2. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов.радио, 1975. – 704 с.
3. Овсянников А.В. Формирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. Вып. X. 2002.– С. 133 – 136.