

Д.А. Гринюк, ассистент

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СДВИГОВОГО ПОТОКА

For the model of electrokinetic transducer with simultaneous availability gradient pressure and shear flow in parallel-plate capillary kinetic equation mass transport taking into account the influence of properties of the studied medium, geometric sizes and colloidal characteristics of the surface of a cell, parameters of coupling chain have been obtained.

В основе технологий дисперсных систем, в том числе и коллоидных, лежат процессы, которые зависят от параметров двойного электрического слоя (ДЭС). Наиболее доступной характеристикой ДЭС является ζ -потенциал, что определяет его использование в качестве параметра для построения систем оптимального управления технологическими процессами [1,2,3].

По совокупности параметров (быстродействие, непрерывность процесса измерения, возможность самоочистки) для построения приборов по измерению электрокинетического потенциала (ЭКП) в промышленных условиях предпочитают метод переменного потенциала (тока) течения [4]. Подобные приборы имеют ряд недостатков: низкое быстродействие, невысокую точность измерения и значительное разрушение частиц при возвратно-поступательном движении.

Для улучшения метрологических характеристик при измерении ЭКП разработан первичный преобразователь, в котором потенциал (ток) течения генерируется с помощью вращающегося элемента – ротора, создающего в щелевом капилляре в зоне расположения измерительных электродов переменный сдвиговый поток. Для правильной интерпретации процессов измерения необходимо получить кинетические уравнения переноса вещества и заряда на основании феноменологического описания электрокинетического преобразования. Это предполагает решение задачи о перераспределении зарядов при наличии в щелевом капилляре сдвигового потока и перепада давления.

Рассмотрим щелевой капилляр с шириной $2 \cdot h$ (рис.), формируемый вращающимся с частотой ω ротором и неподвижной поверхностью, который заполнен несжимаемой ньютоновской жидкостью с динамической вязкостью η и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Поверхности капилляра равномерно заряжены, но имеют различные функции распределения зарядов Φ_1 и Φ_2 и различные значения ЭКП на поверхности

скольжения ζ_1 и ζ_2 . Учитывая, что радиус ротора $R_0 \gg 2 \cdot h$, можно рассматривать течение жидкости между двумя параллельными стенками. Плоскость скольжения жидкости относительно твердого тела лежит за пределами плотной адсорбированной части ДЭС и смещена в область диффузной ионной атмосферы. Движение жидкости в щелевом капилляре обусловлено действием вдоль него постоянного градиента давления, движением одной из стенок и электрическим полем E . Напряжение на электродах при измерении не влияет на работу механической части, так как электровязкостным эффектом можно пренебречь [5].

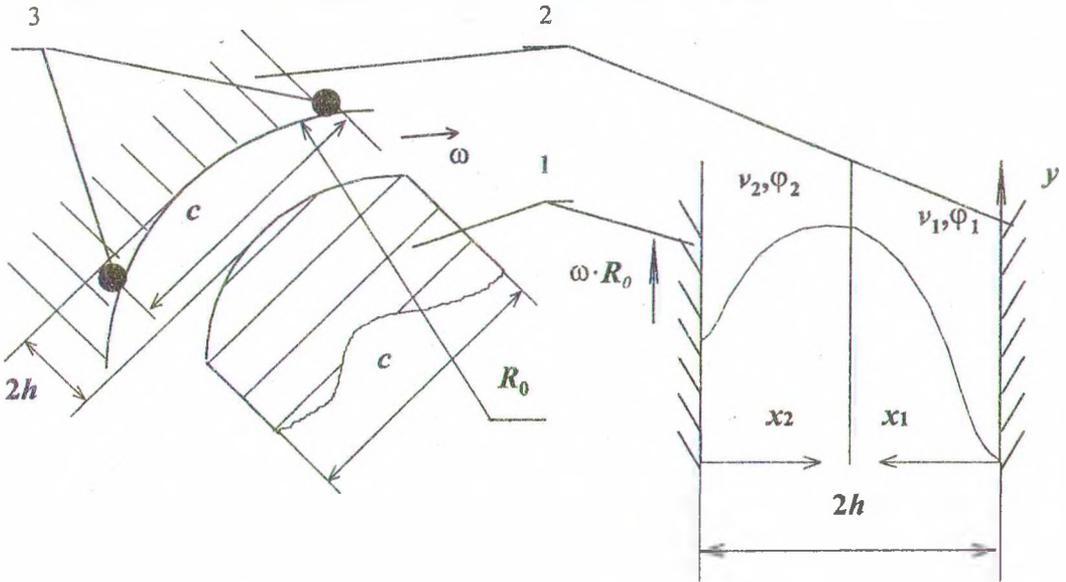


Рис. Щелевой капилляр: 1- ротор; 2- неподвижная стенка; 3- электроды.

Из-за неравноценности вклада в результирующий эффект стенок капилляра его ширину следует разбить на два участка, введя для каждой половины капилляра отдельные декартовы системы координат (x_1, y) и (x_2, y) , с последующим сращиванием решений на границе участков. Уравнения Навье-Стокса для скоростей $v_{1,2}(x_{1,2})$ при стационарном течении жидкости через капилляр и низких числах Рейнольдса могут быть записаны в виде [6]

$$\eta \cdot \frac{d^2 v_{1,2}(x_{1,2})}{dx_{1,2}^2} = -\Delta P - E \cdot \rho_{1,2}(x_{1,2}), \quad (1)$$

где $\rho_{1,2}(x_{1,2})$ - плотность заряда в щелевом капилляре на участках $0 < x_{1,2} < h$.

Уравнения Пуассона для каждой полуплоскости, разделяющей капилляр, можно представить как

$$\rho_{1,2}(x_{1,2}) = -\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2 \varphi_{1,2}}{dx_{1,2}^2}. \quad (2)$$

Функции $v_{1,2}(x_{1,2})$, $\varphi_{1,2}(x_{1,2})$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} \Big|_{x_{1,2}=0} = \zeta_{1,2}; \quad \varphi_{1,2} \Big|_{x_{1,2}=h} = 0; \\ v_1 \Big|_{x_1=0} = 0; \quad v_2 \Big|_{x_2=0} = \omega \cdot R_0; \quad v_1 \Big|_{x_1=h} = v_2 \Big|_{x_2=h}; \\ \frac{d\varphi_{1,2}}{dx_{1,2}} \Big|_{x_{1,2}=h} = 0; \quad \frac{dv_1}{dx_1} \Big|_{x_1=h} = -\frac{dv_2}{dx_2} \Big|_{x_2=h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя $\rho_{1,2}(x_{1,2})$ из (3) в (2) и интегрируя их с использованием граничных условий (4) с учетом того, что $-dp/dy = \Delta P = const$ и $E = \Delta U/c$, получаем выражения

$$\begin{aligned} v_{1,2}(x_{1,2}) = \frac{\omega \cdot R_0}{2 \cdot h} \cdot x_1 + \frac{h \cdot x_{1,2} - \frac{x_{1,2}^2}{2}}{\eta} \cdot \Delta P - \\ - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{c \cdot \eta} \cdot \left(\zeta_1 - (\zeta_1 - \zeta_2) \cdot \frac{x_{1,2}}{2 \cdot h} - \varphi_{1,2}(x_{1,2}) \right) \cdot \Delta U. \end{aligned} \quad (4)$$

Первые два члена в (5) выражают конвективный, а третий - электроосмотический перенос жидкости. Объемный расход жидкости через капилляр на единицу его высоты

$$q = \int_0^h v_1 \cdot dx_1 + \int_0^h v_2 \cdot dx_2$$

определится выражением

$$q = \frac{2 \cdot h^2}{\eta \cdot c} \Delta N + \frac{2 \cdot h^3}{3 \cdot \eta} \cdot \Delta P - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot (1 - (G_1 + G_2))}{c \cdot \eta} \cdot \Delta U, \quad (5)$$

где

$$G_{1,2} = \frac{1}{(\zeta_1 + \zeta_2)} \cdot \int_0^h \varphi_{1,2}(x_{1,2}) \cdot dx_{1,2}; \quad (6)$$

$$\Delta N = -grad(N) = -\frac{\eta \cdot R_0 \cdot c \cdot \omega}{2 \cdot h}. \quad (7)$$

Примем, что носителями заряда в жидкости являются однозарядные катионы и анионы с одинаковой подвижностью. С учетом того, что в предлагаемом устройстве диффузия не оказывает существенного влияния на перенос ионов в капилляре, плотность электрического тока в аксиальном направлении можно представить в виде

$$J_{1,2}(x_{1,2}) = \lambda_0 \cdot E \cdot ch(\tilde{\varphi}_{1,2}) + \rho_{1,2}(x_{1,2}) \cdot v_{1,2}(x_{1,2}), \quad (8)$$

где $\tilde{\varphi}_{1,2}(\tilde{x}_{1,2}) = F \cdot \varphi_{1,2}(x_{1,2}) / R \cdot T$ - приведенный электрический потенциал ДЭС; λ_0 - электрическая проводимость раствора.

Полный электрический ток I в капилляре обусловлен действием электрического поля и градиента давления вдоль капилляра:

$$I = \int_0^h J_1(x_1) \cdot dx_1 + \int_0^h J_2(x_2) \cdot dx_2. \quad (9)$$

Подставляя в (10) значения $J_{1,2}$ из (9), а $v_{1,2}(x_{1,2})$, $\varphi_{1,2}(x_{1,2})$ из (3), (5) и проводя интегрирование, получаем

$$I = -\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot ((\zeta_2 - \zeta_1) + K)}{\eta \cdot c} \cdot \Delta N + \frac{2 \cdot h \cdot \lambda_0}{c} \cdot \frac{1 - (G_1 + G_2)}{L} \cdot \Delta U - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot (1 - (G_1 + G_2))}{\eta} \cdot \Delta P, \quad (10)$$

где

$$K = \frac{2 \cdot h \cdot \chi_2 \cdot R \cdot T}{F} \cdot \left. \frac{d\tilde{\varphi}_2}{d\tilde{x}_2} \right|_{\tilde{x}_2=0}; \quad (11)$$

$$\tilde{Q}_{1,2} = \frac{1}{\chi_{1,2}} \cdot \int_0^{h \cdot \chi_{1,2}} ch \left(\frac{\tilde{\varphi}_{1,2}(\tilde{x}_{1,2}) \cdot R \cdot T}{F} \right) \cdot d\tilde{x}_{1,2};$$

$$\tilde{F}_{1,2} = \chi_{1,2} \cdot \int_0^{h \cdot \chi_{1,2}} \left(\frac{d\tilde{\varphi}_{1,2}(\tilde{x}_{1,2})}{d\tilde{x}_{1,2}} \right)^2 \cdot d\tilde{x}_{1,2};$$

$$L = \frac{h/2 \cdot (1 - (G_1 + G_2))}{\beta \cdot \left((\bar{F}_1 + \bar{F}_2) - \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)^2}{2 \cdot h} \right) + (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2)}; \quad \beta = \frac{\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot R^2 \cdot T^2}{\eta \cdot \lambda_0 \cdot F^2};$$

$\chi_{1,2} \cdot h$ - электрокинетическая полуширина капилляра; $\tilde{x}_{1,2} = \chi_{1,2} \cdot x_{1,2}$ - приведенные координаты; $\tilde{\zeta}_{1,2} = F \cdot \zeta / R \cdot T$ - приведенный электрический потенциал на поверхности капилляра.

Значения L , K , $G_{1,2}$, $\bar{F}_{1,2}$, $\bar{Q}_{1,2}$ могут быть рассчитаны лишь после нахождения распределения электрических потенциалов $\bar{\Phi}_{1,2}(\tilde{x}_{1,2})$ внутри капилляра. Уравнение, связывающее заряд и производную по распределению потенциала на поверхности щелевого капилляра [7]

$$\sigma_{S,2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R \cdot T}{F} \cdot \frac{d\varphi_2(x_2)}{dx_2} \Big|_{x_2=0}$$

обеспечивает представление (12) для K в виде

$$K = \frac{2 \cdot h \cdot F \cdot \sigma_{S,2}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R \cdot T}. \quad (12)$$

При условии $\Delta N = 0$ и равенстве электрокинетических характеристик поверхностей, образующих щелевой капилляр, выражения (6), (11) приобретают вид, аналогичный виду выражений для круглых капилляров с соблюдением равенства перекрестных коэффициентов Онзагера (соотношение Саксена) [8].

Для описания гидродинамических и электрических потоков при несовпадении градиентов давления и силы по направлению в уравнениях (6), (11) следует поменять на противоположные знаки перед ΔP . При условии $\Delta P = 0$ и $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$ с учетом (13) уравнения (6) и (11) упрощаются к виду

$$q = \frac{2 \cdot h^2}{\eta \cdot c} \Delta N - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot (1 - (G_1 + G_2))}{c \cdot \eta} \cdot \Delta U; \quad (13)$$

$$I = -\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot ((\zeta_2 - \zeta_1) + K)}{\eta \cdot c} \cdot \Delta N + \frac{2 \cdot h \cdot \lambda}{c} \cdot \frac{1 - (G_1 + G_2)}{L} \cdot \Delta U. \quad (14)$$

В выражениях (14), (15) перекрестные коэффициенты неравны, что противоречит соотношению взаимности Онзагера [8]. Этот факт является

следствием различия отклонений ДЭС от равновесия для каждой из поверхностей, образующих капилляр, и несимметричности относительно оси капилляра гидродинамического поля сдвигового потока в отличие от электрического.

Полученные уравнения обеспечивают анализ и интерпретацию экспериментальных данных для предложенных электрокинетических преобразователей в широком диапазоне изменения параметров. При измерении электрокинетических характеристик методом тока I_{St} ($\Delta U \rightarrow 0$) или потенциала течения U_{St} ($I \rightarrow 0$) в наиболее грубых условиях $\Delta P \rightarrow 0$, $L/\lambda_0 \rightarrow 1/(\lambda_0 + 2 \cdot \lambda_S/h)$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ (одинаковые свойства поверхностей, формирующих щелевой капилляр) из уравнения (11) для щелевого капилляра высотой H получаются следующие расчетные формулы:

$$I_{St} = -H \cdot R_0 \cdot \omega \cdot \frac{\sigma_{S,2} \cdot F}{R \cdot T},$$

$$U_{St} = \frac{c \cdot \omega \cdot R_0}{2 \cdot h \cdot \left(\lambda_0 + \frac{2 \cdot \lambda_S}{h} \right)} \cdot \frac{\sigma_{S,2} \cdot F}{R \cdot T}.$$

На основании системы уравнений (6), (11) может быть получена эквивалентная схема замещения подобных преобразователей. Таким образом, предлагаемая модель построения первичных преобразователей с использованием сдвигового потока может быть применима при разработке приборов измерения электрокинетических свойств, а полученная система уравнений применима для исследования и оптимального выбора конструктивных параметров подобных преобразователей в области низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валендо П.Ф., Цмыг Н.Г. Совершенствование технологии производства бумаги и картона в БССР.- Минск: БТИ, 1979.
2. Critcheley R.F., Smith E.O., Pettit P. Automatic coagulation control at water treatment.// Journal Inst. Water and Env. 1990, V.4, № 6, 443-452.
3. Bernazeau F., Hubele G. L'utilisation du "Streaming Current Detector". // Techn. Sci. Meth., 1991, 4, №5, 225-230.
4. Gerdes W.F. Streaming current detector measures colloid stability.// ISA Journal, December, 1966, 38-43.
5. Введение в молекулярную электронику. / Н.С. Лидоренко, Б.И Ильин, И.А. Зайденман. - М.: Энергоатомиздат, 1984.

6. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potential. / S. Levine, J. Marriot, G. Neale, N. Epstein.// J. Colloid Interface Sci., 1975, v. 52, № 1, P.136-149.
7. Жарких Н.И., Духин С.С. Строение двойного электрического слоя в плоском капилляре. // Коллоидный журнал, 1986, Т.48.-С. 891-899.
8. Духин С.С., Дерягин Б.В. Электрофорез.- М: Наука, 1976.

УДК 62.50

Д.С. Карпович, аспирант

РАСЧЁТ РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The Kharitonov's theorem is applied for investigation of a robust stability of electromechanical systems. The characteristic equation of such a system is given as a determinant of a third-order polynomial with coefficients from which a scalar interval polynomial is obtained. A simple procedure for designing controllers for these electromechanical system is described.

В настоящее время в качестве объектов управления часто используются электромеханические системы. Передаточную функцию таких систем, как правило, можно записать в виде аperiодического звена второго порядка:

$$W(p) = \frac{k_0}{T_1 \cdot p^2 + T_2 \cdot p + 1}, \quad (1)$$

где k_0 - коэффициент усиления;
 T_1, T_2 - постоянные времени.

Например, для электропривода постоянного тока

$$k_0 = k \cdot \Phi; T_1 = \frac{L \cdot I}{k^2 \cdot \Phi^2}; T_2 = \frac{I \cdot R}{k^2 \cdot \Phi^2}, \quad (2)$$

где k - конструктивная постоянная машины;

Φ - магнитный поток;

L - индуктивность якорной цепи;

I - суммарный момент инерции привода;

R - сопротивление якорной цепи.

Под влиянием внешних воздействий будут изменяться магнитный поток и суммарный момент инерции привода, а следовательно, и параметры объекта [1]. Использование регулятора, рассчитанного при допущении неизменности параметров объекта управления, становится несколько проблематично, т.к. при изменении параметров объекта вся система может