УДК 539.3:517.962

Т.А. Долгова, ст. преподаватель

НЕСОВМЕСТНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

The three-dimensional finite elements based on external approximations of the Sobolev spaces is applied to problems of elasticity. Questions of determining polinomial basic functions and calculating stiffness matrix are discussed.

При применении метода конечных элементов (МКЭ) для решения трехмерных задач теории упругости приходится сталкиваться со специфическими проблемами, которые снижают эффективность расчетов и сужают область применения трехмерных конечных элементов. Эти проблемы связаны с введением большого числа степеней свободы для конечноэлементного представления трехмерного тела, с построением конечных элементов (КЭ) сложной формы, с большими погрешностями вычислений.

Основные трудности метода конечных элементов обусловлены необходимостью выполнения требований сходимости. Центральной проблемой при построении конечноэлементных аппроксимаций является обеспечение достаточной гладкости аппроксимирующих функций. Для сплошного тела, разбитого на дискретные элементы, соединенные между собой в узлах, не всегда удается достигнуть непрерывности обобщенных перемещений вдоль поверхности контакта между смежными элементами. Тогда условия непрерывности вдоль межэлементных границ выполняются приближенно.

Имеется много примеров, где выполнение условий неразрывности аппроксимирующих функций в МКЭ является затруднительным. Это встречается, например, в случае соединения в конструкции элементов различных типов, а также тогда, когда однотипные элементы имеют различные аппроксимирующие функции (например, полиномы различных степеней) [1].

Отказ от требования межэлементной непрерывности аппроксимирующих функций значительно упрощает построение КЭ, которые в этом случае будут несовместными.

Такие конечные элементы строятся в методе внешних конечноэлементных аппроксимаций [2] на основе теории внешних аппроксимаций пространств Соболева H^m [3] и вариационных уравнений, соответствующих краевым задачам механики порядка $2m$.

Применением этот подход к решению трехмерных задач теории упругости, т.е. рассмотрим построение внешней аппроксимации пространства

V векторных функций перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$. Поскольку порядок пространственных задач теории упругости равен 2, V является подпространством векторного пространства Соболева при $m = 1$.

Расчетная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ разбивается на конечные элементы K, каждый из которых является замкнутой областью в $\mathbf{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial K = \cup \partial K_r$. Пространство V аппроксимируется некоторым пространством X^h, функции которого являются непрерывными внутри КЭ и терпят разрыв на межэлементных границах. Внешние аппроксимации [4] имеют место, если качество гладкости восстанавливается в пределе:

$$\lim_{h \to 0} X_h \subset H^1(\Omega),$$

где h — параметр аппроксимации, уменьшающийся при сгущении сетки КЭ или при увеличении размерности пространства X_h.

Краевой задаче теории упругости соответствует дискретизированная вариационная задача, которая для отдельного конечного элемента заключается в отыскании такой функции $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$ из пространства $W = \{v^h \in (H^1(K))^3, v_{Gl} = 0\}$, что для любой v^h из W выполняется:

$$\int_K \sum_{ij=1}^{3} \sigma_{ij}(u^h)\varepsilon_{ij}(v^h)dx = \int_K \sum_{i=1}^{3} f_i v_i dx + \int_{G2} \sum_{i=1}^{3} g_i v_i d\gamma,$$

или кратко

$$a_l^h(u^h, v^h) = f(v^h), \qquad (1)$$

где $G1$ и $G2$ — участки границы конечного элемента, $d\gamma$ — элемент поверхности.

Билинейная форма a^h дискретизированной вариационной задачи состоит из вкладов a_l^h по всем КЭ разбиения. Базис пространства X_h аппроксимирующих функций строится из базисных функций пространств W отдельных элементов.

Каждый гладкий участок границы КЭ можно взаимнооднозначно и непрерывно отобразить на двухмерную область K_r:

$$\partial K_r(x_1, x_2, x_3) \to K_r(t_1, t_2).$$

K_r называют поверхностным элементом. Для всех поверхностных элеметов, определенных на отдельном КЭ, задаются пространства аппроксимирующих функций, которые составят пространство G^h граничных аппроксимирующих функций всего конечного элемента. Носителем базисных функций $g \in G^h$ является участок границы элемента ∂K_r либо совпадающий с границей всей области Ω, либо являющийся смежным для двух КЭ. Во втором случае функции g таковы, что на общем участке границы двух смежных элементов K^1 и K^2 выполняется условие:

$$g_j^1 = -g_j^2, \qquad j = \overline{1,M},$$

где верхний индекс соответствует номеру КЭ, M — число функций g поверхностного элемента.

В [5] приведена теорема о необходимом и достаточном признаке внешних аппроксимаций пространств H^1. Основным условием этой теоремы является равенство нулю скалярного произведения функций $g \in G^h$, определенных на границе, и функций, являющихся сужением $x_h \in X_h$ на эту границу: $(g, w) = 0$, где $w = x_h\big|_{\partial Kr}$. Тогда, по определению скалярного произведения, для элемента K^1 и смежного с ним элемента K^m выполняется:

$$\int\limits_{\partial Kr} (g^1 w^1 + g^m w^m) d\gamma = 0, \ \forall g^m \in G^h, \ \forall w^m \in W^m \subset H^1(K^m). \quad (2)$$

Аналогичное условие должно выполняться и на участках ∂K_r, совпадающих с границей всей области.

Интегралы, стоящие в левой части (2), являются непрерывными линейными формами на $H^1(K)$. Эти функционалы обозначают $\varphi(w)$:

$$\varphi_j(w_i) = \int\limits_{\partial Kr} g_j w_i d\gamma .$$

Таким образом, из необходимого и достаточного признака внешних аппроксимаций вытекает структура аппроксимирующего пространства конечного элемента

$$W = W^{\Sigma} \oplus W^{Z}$$

и вид представления функции перемещения:

$$u_i^h = \sum_{j=1}^{M} \varphi_j(u_i) w_j^{\Sigma} + \sum_{k=1}^{N-M} b_k(u_i) w_k^{Z}, \quad (3)$$

где M — размерность базиса пространства G^h граничных аппроксимирующих функций, N — размерность базиса аппроксимирующего пространства W конечного элемента, w_k^Z и w_j^Σ — базисные функции соответствующих подпространств. Областью определения w_k^Z является отдельный КЭ, и значения $\varphi_j(w_k^Z)$ нулевые, областью определения w_j^Σ являются два смежных КЭ и ненулевые значения $\varphi_j(w_k^\Sigma) = 1$ будут только при $k = j$. Коэффициенты разложения b_k и φ_j называют соответственно внутренними и граничными степенями свободы.

Функции w_k^Z и w_j^Σ всех КЭ разбиения формируют общее аппроксимирующее пространство X_h. Значения u_i^h, вычисленные для двух смежных КЭ (K^1 и K^2) в точке их межэлементной границы, в общем случае не равны друг другу, u_i^h здесь терпят разрыв. В силу (2), равны между собой будут соответствующие граничные степени свободы ($\varphi^1 = -\varphi^2$), т.е. имеет место так называемая интегральная стыковка.

Требованиям, предъявляемым к структуре аппроксимирующих пространств, в полной мере отвечают пространства полиномов.

Таким образом, W является полным векторным пространством полиномов k-ой степени $P^k = (P_1^k, P_2^k, P_3^k)$. Базисные функции каждого из них имеют вид

$$p_j = x_1^{m1} \cdot x_2^{m2} \cdot x_3^{m3}, \qquad 0 \le m1 + m2 + m3 \le k.$$

Порядок полиномов k называется порядком внутренней аппроксимации.

В качестве пространства граничных аппроксимирующих функций также удобно взять полное пространство полиномов, но от двух переменных. Граничные базисные функции будут иметь вид

$$g_j = t_1^{s1} \cdot t_2^{s2}, \qquad 1 \le s1 + s2 \le s,$$

где s — максимальный порядок полиномов, называемый порядком граничной аппроксимации.

Порядки граничной аппроксимации по координатным направлениям могут быть разные: $s_i, i = \overline{1,3}$. Каждое из пространств P_i^k разбивается на подпространства P_i^z и P_i^Σ. Базисы их получаются путем алгебраических преобразований базисных функций исходного P_i^k с использованием значений функционалов φ от последних [2]. И каждая компонента вектора перемещений, независимо от остальных, представима по формуле (3), в которой $M = M(s_i)$.

Для нахождения значений коэффициентов этих разложений формула (3) подставляется в вариационное уравнение (1), которое должно выполняться для любых базисных функций аппроксимирующего пространства:

$$\begin{cases} a^h(u_i^h, w_{ij}^\Sigma) = f(w_{ij}^\Sigma) \\ a^h(u_i^h, w_{im}^Z) = f(w_{im}^Z) \end{cases}, \qquad i = \overline{1,3}. \qquad (4)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений после преобразований, учитывающих свойства билинейной формы a^h, в матричном виде аналогична стандартной системе МКЭ: $R\,q = F$.

Матрица жесткости R будет состоять из чисел, равных значению билинейной формы a^h от базисных функций w_{ij}^Σ, w_{im}^Z. В силу известных зависимостей напряжений и деформаций от перемещений, элементы матрицы жесткости представляют собой интегралы по области КЭ от частных производных этих функций. Для вычисления элементов вектора правой части необходимы итегралы по области (объемная нагрузка) и границе (поверхностная нагрузка) конечного элемента. При построении базиса КЭ (разбиении W на W^Σ и W^Z) используются значения функционалов $\varphi(p_j)$, которые представляют собой интегралы по поверхности КЭ. Поскольку все подынтегральные функции полиномиальные, то возможно точное вычисление интегралов на основании формулы Грина. При этом устраняется существенный источник погрешности приближенного решения и значительно снижаются вычислительные затраты в сравнении с процедурами численного интегрирования.

Вектор q степеней свободы состоит из подвекторов φ и b граничных и внутренних степеней свободы. При решении системы уравнений подвектор b исключается из рассмотрения путем конденсации. Размерность конденсированной матрицы жесткости определят только порядки граничной аппроксимации на межэлементных участках граней. Эта величина не зависит от числа узлов КЭ, что ведет к значительному сокращению числа уравнений разрешающей системы.

Общая матрица жесткости состоит из вкладов отдельных конечных элементов и имеет ленточную структуру, т. к. каждый межэлементный участок грани, где порождаются граничные степени свободы, принадлежит только двум смежным КЭ.

Решение общей системы линейных алгебраических уравнений дает значение граничных степеней свободы, на основании которых рассчитываются конденсированные внутренние степени свободы. Полученные степени свободы используются как коэффициенты для построения функций (3), аппроксимирующих вектор перемещений. Значения напряжений и деформаций вычисляются по формулам теории упругости, при этом частные производные от компонент вектора перемещений находятся по точным аналитическим формулам.

Таким образом, предлагаемые трехмерные несовместные КЭ с полиномиальным базисом аппроксимации позволяют проводить уточнение решения без переразбиения расчетной области, путем повышения порядков аппроксимации. Числа граничных степеней свободы, вводимых по координатным направлениям, могут быть разными. Меньшее количество этих степеней свободы, по сравнению с узловыми степенями свободы классических подходов МКЭ, ведет к значительному сокращению вычислительных затрат. Использование полиномиальных аппроксимирующих функций снижает погрешность численного метода. Кроме того, поскольку степени свободы не связаны с узлами разбиения, число, форма и расположение гладких граней КЭ могут быть произвольным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. - М.: Стройиздат, 1982.
2. Апанович В.Н. Метод внешних конечноэлементных аппроксимаций.- Мн.: Выш. шк., 1991.
3. Деклу Ж. Метод конечных элементов: Пер. с франц.- М.: Мир, 1976.
4. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач: Пер. с англ.-М.: Мир, 1977.
5. Долгова Т.А. Внешние конечноэлементные аппроксимации трехмерных задач теории упругости // Дифференциальные уравнения. - 1995. - Т.31, №11.- С. 1927-1929.