УДК 621.3

В.И. Горошко, доцент

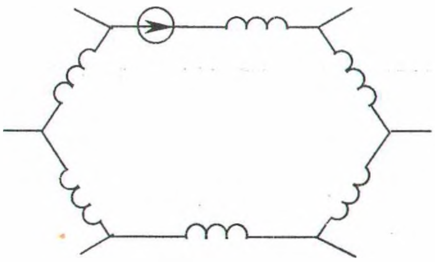
АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

The paper deals with linear electric circuits with such topological singularities as LE-loops and CJ-sections. The properties of driving-point functions and two theorems for these structures are ascertaind and on their base the minimal differential equation obtaining technique is developed. The results are applied to circuit of fourth degree.

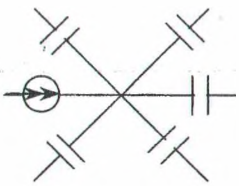
Под степенью сложности электрической цепи при анализе переходных процессов понимают количество реактивных элементов, в которых возможно независимое задание начальных индуктивных токов и емкостных напряжений. Степень сложности определяет итоговый порядок дифференциального уравнения цепи.

Редукция порядка дифференциального уравнения очевидным образом наблюдается в цепях, содержащих такие топологические особенности, как индуктивные сечения (LJ-сечения) и емкостные контуры (CE-контуры) [1].

В настоящей работе рассматриваются цепи, содержащие топологические структуры: а) индуктивный контур (LE-контур), б) емкостное сечение (CJ-сечение).



а) LE-контур



б) CJ-сечение

Рис. 1

Эти соединения допускают независимое задание всех начальных индуктивных токов и емкостных напряжений. По формальным признакам, в таких цепях не происходит понижение порядка дифференциального уравнения, на что в некоторых руководствах имеются прямые указания [2]. Однако благодаря специфическим особенностям LE-контуров и CJ-сечений при определенной технике преобразований всегда возможна редукция порядка дифференциального уравнения цепи. Легко устанавливается такая особенность цепи, как наличие нулевых корней характеристического уравнения. Это видно непосредственно из рис. 1 а, если для составления характеристического уравнения использовать импедансные подходы, например, входное сопротивление. Если вход цепи взять в одной из ветвей индуктивного контура, то очевидно наличие у характеристического полинома $Z(s)$, где s-комплексная переменная нулевого корня, поскольку при s=0 имеется сквозной путь от зажима к зажиму. Если вход цепи взять за пределами LE-контура, то при s=0 сквозной путь невозможен, так как на любом пути неизбежно встретится R- либо C-элемент. Поскольку нулевой корень соответствует постоянной составляющей, то из этих рассуждений вытекает, что в L-контуре возможно наличие постоянного свободного тока (петлевого тока) даже при отсутствии во внешней цепи постоянных источников. Аналогичным образом устанавливается возможность присутствия постоянных свободных напряжений в C-сечениях (узлах).

Эти же результаты можно получить, если анализ вести через контурный $\Delta_к(s)$ или узловой $\Delta_у(s)$ определители. Например, $\Delta_к$(s) для цепи с LE-контуром будет с необходимостью содержать строку (столбец), состоящую только из индуктивных сопротивлений sL и нулей:

$$\Delta_k(s) = \begin{bmatrix} s\sum_{k=1}^{n} L_k & -sL_1 & -sL_2 \dots -sL_n & 0\dots 0 \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix},$$

где $s\sum_{k=1}^{n} L_k$ – собственное сопротивление L-контура, а остальные элементы строки – сопротивления граничных со всеми остальными контурами ветвей. Вынося s за определитель, устанавливаем наличие нулевого корня. Отметим, что присутствие вне контура емкостей может приводить к невыявлению нулевых корней через $\Delta_к(s)$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты, которые в силу их значимости сформулированы в виде теорем.

1) ПИ-теорема (теорема об изменении потокосцепления): потокосцепление LE-контура определяется формулой

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} L_k i_{Lk}(t) = \psi(0) + \int_0^t e(t)dt\,, \tag{1}$$

где $\psi(0) = \sum L_k i_{Lk}(0)$ – начальное потокосцепление контура; $e(t)$ – задающая эдс контура, равная алгебраической сумме напряжений всех независимых источников напряжения контура. ПИ-теорема фактически устанавливает условия обратимости закона электромагнитной индукции для LE-контура и выводится из второго закона Кирхгофа с последующим интегрированием.

Приведем некоторые следствия теоремы.

Следствие 1.1. Если LE-контур пассивен, т. е. $e(t)$=0 (ЭДС в контуре отсутствуют или уравновешены), то потокосцепление контура неизменно и равно начальному:

$$\psi(t) = \psi(0),\ \forall t \tag{1.1}$$

(принцип постоянства потокосцепления).

Следствие 1.2. Если $e(t)$ является непрерывной или кусочно-непрерывной функцией времени, то потокосцепление контура непрерывно (принцип непрерывности потокосцепления контура).

Следствие 1.3. При наличии сингулярностей в e(t), например δ-функций Дирака, потокосцепление контура разрывно.

2) ЗИ-теорема (теорема об изменении заряда): суммарный заряд всех емкостей CJ-сечения (узла) определяется формулой

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k u_{Ck}(t) = q(0) + \int_0^t J(t)dt\,, \tag{2}$$

где $q(0) = \sum C_k u_{Ck}(0)$ – начальный суммарный заряд; $J(t)$ – задающий ток сечения, равный алгебраической сумме токов всех независимых источников токов сечения.

Следствия ЗИ-теоремы.

Следствие 2.1. Если CJ-сечение пассивно, то есть $J(t)$=0 (источники тока в сечении отсутствуют или уравновешены), то суммарный заряд сечения неизменен и равен начальному заряду:

$$q(t) = q(0),\ \forall t \tag{2.1}$$

(принцип постоянства заряда сечения).

Следствие 2.2. Если $J(t)$ является непрерывной или кусочно-непрерывной функцией времени, то суммарный заряд сечения непрерывен (принцип непрерывности заряда сечения).

Следствие 2.3. При наличии сингулярностей в $J(t)$, например δ-функций Дирака, суммарный заряд сечения разрывен.

LE-контур и CJ-сечение дуальны, поэтому справедливость ЗИ-теоремы следует непосредственно из принципа дуальности.

Разрешив уравнение (1) относительно одного из токов контура, например тока i_{Ln}, получим

$$i_{Ln} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k i_{Lk} + f_1(t), \tag{3}$$

где $a_k = -\dfrac{L_k}{L_n}$; $\quad f_1(t) = \dfrac{1}{L_n}(\psi(0) + \int\limits_0^t e(t)dt)$.

Аналогично для уравнения (2):

$$u_{Cn} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k u_{Ck} + f_2(t), \tag{4}$$

где $b_k = -\dfrac{C_k}{C_n}$; $\quad f_2(t) = \dfrac{1}{C_n}(q(0) + \int\limits_0^t J(t)dt)$.

Таким образом, одна из переменных в рассматриваемых топологических структурах линейно выражается через остальные переменные плюс некоторая известная функция $f(t)$. Из этого важного факта вытекает методика построения «минимального» дифференциального уравнения цепи.

а) В каждой топологической структуре LE-контур, CJ-сечение выделяем, согласно (3), (4), одну из переменных i_{Ln}, u_{Cn}.

б) Методом подстановки исключаем эти переменные из уравнений динамики цепи, что автоматически понижает порядок дифференциального уравнения цепи на количество таких топологических структур.

Вместо процесса подстановки переменных можно ветви с током i_{Ln} и напряжением u_{Cn} заменить, согласно теоремам замещения, источником тока и источником напряжения соответственно. Эти источники относятся к классу линейно управляемых источников.

Проиллюстрируем на примере эффективность предлагаемой методики получения дифференциального уравнения минимального порядка.

Пример.

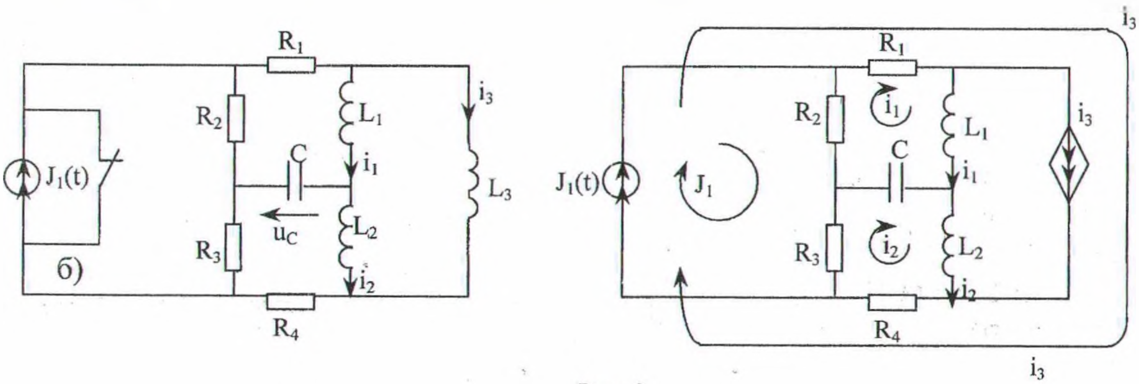


Рис. 2

При t=0 к цепи подключается некоторый источник тока $J_1(t)$. R_1=5 Ом; R_2=1 Ом; R_3=2 Ом; R_4=6 Ом; L_1=2Г; L_2=3Г; L_3=2Г; С=1Ф.

Начальные условия: $i_1(0)$=4 А; $i_2(0)$=6 А; $i_3(0)$=3 А; $u_c(0)$=0.

В цепи имеется пассивный L-контур, включающий индуктивности L_1, L_2, L_3. Согласно следствию (1.1), потокосцепление этого контура неизменно:

$$\psi(t) = L_1 i_1 + L_2 i_2 - L_3 i_3 = \psi(0) = L_1 i_1(0) + L_2 i_2(0) - L_3 i_3(0) = 20\,\text{Вб}.$$

В качестве исключаемой переменной выбираем ток i_3:

$$i_3 = \frac{L_1}{L_3} i_1 + \frac{L_2}{L_3} i_2 - \frac{\psi(0)}{L_3} = i_1 + 1.5 i_2 - \frac{1}{2}\psi(0). \tag{5}$$

На рис. б показан управляемый источник i_3, замещающий ветвь с индуктивностью L_3. Для цепи на рис. 2 б достаточно составления двух контурных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i_1(t)\left[R_1 + R_2 + pL_1 + \frac{1}{pC}\right] - \frac{1}{pC} i_2(t) + (R_1 + R_2) i_3(t) = R_2 J_1(t);\\ i_2(t)\left[R_3 + R_4 + pL_2 + \frac{1}{pC}\right] - \frac{1}{pC} i_1(t) + (R_3 + R_4) i_3(t) = R_3 J_1(t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставив вместо i_3 управляющую правую часть (5) после группировки слагаемых, найдем

$$\left.\begin{aligned} (2p^2 + 12p + 1) i_1 + (9p - 1) i_2 = pJ_1(t) + p3\psi(0);\\ (8p - 1) i_1 + (3p^2 + 20p + 1) i_2 = p2J_1(t) + p4\psi(0). \end{aligned}\right\}$$

Вычисляя определители системы

$$\Delta(p) = p(6p^3 + 76p^2 + 173p + 49),$$
$$\Delta_1(p) = p\left[(3p^2 + 2p + 3)J_1(t) + (9p^2 + 24p + 7)\psi(0)\right],$$

получаем искомое дифференциальное уравнение цепи

$$\Delta(p) i_1(t) = \Delta_1(p),$$

или

$$6i_1'''(t) + 76i_1''(t) + 173i_1'(t) + 49i_1 = 3J_1''(t) + 2J_1'(t) + 3J_1(t) + 7\psi(0). \tag{7}$$

Проанализируем полученное уравнение (7). Во-первых, его порядок, равный трем, ниже количества реактивных элементов цепи на единицу, так как имеется один L-контур. Во-вторых, правая часть (7), помимо функций $J_1(t)$, содержит постоянную составляющую $7\psi(0)$. Если, например, $J_1(t) \neq$const, то в установившемся режиме при $t \to \infty$ $i_{1уст} = \frac{1}{7}\psi(0)$.

Такими же будут и установившиеся токи остальных индуктивностей. Эти токи вычисляются как вынужденные составляющие общего решения. Но фактически они образуют свободный петлевой ток $I_П$, порождаемый нулевым корнем характеристического уравнения. Этот ток можно найти непосредственно из ПИ-теоремы

$$I_П = \frac{\psi(0)}{\sum L_k} = \frac{1}{7}\psi(0).$$

Эти рассуждения поясняют механизм понижения порядка дифференциального уравнения и показывают, что изложенная методика по сути дела изменяет «статус» свободного петлевого тока. Он становится вынужденным током, что избавляет характеристическое уравнение от нулевых корней и, таким образом, понижает порядок дифференциального уравнения.

Если $J_1(t)$=const, то в установившемся режиме на петлевой ток I_Π накладываются дополнительные постоянные составляющие индуктивных токов. Пусть, например, $J_1(t)=12$ А=const, $\psi(0)=0$. Тогда из уравнения (7) при $t\to\infty$ получим

$$I_{1уст} = \frac{3J_1}{49} = \frac{36}{49} A .$$

Этот ток можно также найти через ПИ-теорему.

Таким образом, для заданных в примере начальных условий и для постоянного источника $J_1=12$ А полный установившийся ток

$$i_{1уст} = \frac{\psi(0)}{7} + \frac{36}{49} = \frac{176}{49} A .$$

Все общие свойства, установленные для LE-контура, дуальным образом переносятся на CJ-сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем. М.: Энергия, 1980.
2. В.П. Попов. Основы теории цепей. М.: Высш. шк., 2000.