нарный и импульсный режимы истечения жидкости. Аналогичные расчеты можно провести для других значений a_1.

На стадии ускорения частицы, вылетающие из резервуара позже, догоняют частицы, вылетевшие раньше. Поэтому на конечной стадии истечения в импульсном режиме скорости вылетевших частиц в результате столкновений должны усредняться и основная масса жидкости может образовать единый объем, движущийся с некоторой усредненной скоростью. В квазистационарном режиме, напротив, происходит дробление объема, поскольку основное время истечения занимает стадия замедленного движения границы, при котором частицы, вылетевшие позже, отстают от частиц, вылетевших раньше.

ЛИТЕРАТУРА

Емцев Б.Г. Техническая гидродинамика. - М.: Машиностроение, 1987.

УДК 532.517

А.М. Волк, ст. преподаватель

ПЛЁНОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Laminar film movement of a viscous liquid under influence of a gas flow on an inclined nontight plane and internal wall of the nontight cylinder is considered. The analytical solutions of the Navier-Stokes equations are received and basic dynamic characteristics are found.

Гидродинамика плёночного течения имеет существенное значение в процессах тепломассопереноса и при оптимизации технологических процессов.

В ряде случаев плёночное течение осуществляется на проницаемых поверхностях. Отсос используется для управления пограничным слоем и влияния на устойчивость ламинарного режима движения [1,2].

Рассмотрим плёночное ламинарное течение вязкой жидкости по наклонной плоскости под воздействием газового потока. При постоянной скорости оттока V_0 с учётом действия силы тяжести g_α и перепада давления по длине $\psi = \partial P / \partial x$ уравнение движения жидкой фазы будет

$$V_0 \frac{dU}{dy} = g_\alpha - \psi + \nu \frac{d^2U}{dy^2}.$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на поверхности и равенство касательных напряжений на границе раздела фаз:

$$U\big|_{y=0}=0; \quad \mu\frac{dU}{dy}\bigg|_{y=\delta}=\tau.$$

Интегрируя данное уравнение с учётом заданных граничных условий, получим распределение скорости пленки в зависимости от нормальной координаты.

$$U=\left(\frac{\tau}{\mu}-\frac{g_\alpha-\psi}{V_0}\right)\frac{\nu}{V_0}\exp\left(-\frac{V_0}{\nu}\delta\right)\left[\exp\left(\frac{V_0}{\nu}\right)-1\right]+\frac{(g_\alpha-\psi)y}{V_0}.$$

Интегрируя по толщине плёнки, найдем расход жидкой фазы на единицу ширины.

$$q=\left(\frac{\tau}{\mu}-\frac{g_\alpha-\psi}{V_0}\right)\frac{\nu}{V_0}\left[\frac{\nu}{V_0}-\left(\frac{\nu}{V_0}+\delta\right)\exp\left(-\frac{V_0}{\nu}\delta\right)\right]+\frac{(g_\alpha-\psi)y}{2V_0}\delta^2.$$

Изменение расхода по длине описывается уравнением $dq\,/\,dx=-V_0$.

Разлагая в ряд, получим:

$$q=\frac{\tau\delta^2}{\mu}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3!}\frac{V_0\delta}{\nu}+\frac{3}{4!}\frac{{V_0}^2\delta^2}{\nu^2}+\cdots+\frac{(-1)^k(k+1)}{(k+2)!}\frac{{V_0}^k\delta^k}{\nu^k}+\cdots\right]+$$

$$+\frac{\rho(g_\alpha-\psi)\delta^3}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{4!}\frac{V_0\delta}{\nu}+\cdots+\frac{(-1)^k}{(k+3)!}\frac{{V_0}^k\delta^k}{\nu^k}+\cdots\right].$$

При $V_0=0$ получаем, как частный случай, расход при плёночном течении по наклонной плоскости.

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием газового потока. Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z. В силу осесимметричности $\partial U\,/\,\partial\varphi\equiv 0$. Запишем уравнения Навье-Стокса для осевой составляющей скорости и уравнение неразрывности:

$$\rho\left(V\frac{\partial U}{\partial r}+U\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\rho g-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV)+\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Скорость оттока жидкой фазы V_0 на некотором элементарном цилиндре длины Δz будем считать постоянной. Объемный расход несжимаемой жидкости через цилиндрические поверхности равной длины будет одинаков: $2\pi rV\Delta z = 2\pi RV_0\Delta z$. Отсюда находим радиальную скорость в плёнке жидкости: $V = V_0R/r$. Тогда из уравнения неразрывности получим $\partial U/\partial z = 0$ и $U = U(z)$. Это означает, что решение будет автомодельным, а уравнение примет вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{V_0R}{\nu} - 1\right)\frac{dU}{dr} = -\frac{\rho g - \psi}{\mu}.$$

Выполним переход к безразмерной координате $\tilde{r} = r/R$

$$\frac{d^2U}{d\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}\left(\frac{V_0R}{\nu} - 1\right)\frac{dU}{d\tilde{r}} = -\frac{\rho g - \psi}{\mu}R^2.$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на стенке и равенство касательных напряжений на границе раздела фаз:

$$U\big|_{\tilde{r}=1} = 0\ ; \qquad \frac{dU}{d\tilde{r}}\bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{\tau}{\mu}R.$$

Получаем общее решение

$$U = c_1 + c_2 r^{\alpha} + \frac{\rho g - \psi}{2\mu(\alpha - 1)}r^2,$$

где $\alpha = V_0R/\nu$.

При выполнении условия прилипания

$$U = c_2(1 - \tilde{r}^{n}) - \frac{\rho g - \psi}{2\mu(\alpha - 2)}R^2(1 - \tilde{\tau}^2).$$

Из условия равновесия сил, действующих на газовый поток

$$\pi(R - \tilde{\delta})^2\Delta P = 2\pi(R - \tilde{\delta})\tau' l,$$

находим

$$\psi = \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau'}{R(1 - \tilde{\delta})} = -\frac{2\tau}{R(1 - \tilde{\delta})}.$$

Учитывая второе граничное условие, получаем распределение скорости в плёнке жидкости

$$U = \left[\frac{\tau_z R}{\mu(\alpha - 2)(1 - \tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^2}{\mu\alpha(\alpha - 2)(1 - \tilde{\delta})^{\alpha-2}}\right](1 - \tilde{r}^{\alpha}) -$$

$$-\left[\frac{\rho g R^2}{2\mu\alpha(\alpha-2)}+\frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})}\right](1-\tilde{r}^2).$$

Найдем объемный расход жидкой фазы на единицу периметра

$$q = R\int\limits_{1-\tilde{\delta}}^{1} U\tilde{r}\,d\tilde{r} =$$

$$=\left[\frac{\tau R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}}+\frac{\rho g R^3}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}}\right]\left[\frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2}-\frac{1-(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]-$$

$$-\left[\frac{\rho g R^3}{2\mu(\alpha-2)}+\frac{\tau R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})}\right]\left[\frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2}-\frac{1-(1-\tilde{\delta})^4}{4}\right].$$

Изменение данного объемного расхода по длине описывается уравнением $dq/dz = -V_0$.

$$q=\frac{\tau R^2}{\mu(\alpha-2)}\left[\frac{\alpha}{2(\alpha+2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}}-\frac{1}{2(1-\tilde{\delta})^{\alpha-3}}+\frac{(1-\tilde{\delta})^3}{\alpha+2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4(1-\tilde{\delta})}+\frac{1-\tilde{\delta}}{2}-\frac{(1-\tilde{\delta})^3}{4}\right]+\frac{\rho g R^3}{\mu(\alpha-2)}\left[\frac{1}{2(\alpha+2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}}-\right.+$$

$$\left.-\frac{1}{2\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha-4}}-\frac{(1-\tilde{\delta})^4}{\alpha(\alpha+2)}-\frac{1}{8}+\frac{(1-\tilde{\delta})^2}{4}-\frac{(1-\tilde{\delta})^4}{4}\right].$$

Разложение правой части в ряд по степеням δ до четвертой степени включительно имеет вид

$$q=\frac{\tau R^2}{\mu}\left[\frac{\tilde{\delta}^2}{2}+\frac{2\alpha}{3!}\tilde{\delta}^3+\frac{3(\alpha^2+1)\tilde{\delta}^4}{4!}+\ldots\right]+\frac{\rho g R^3}{\mu}\left(\frac{2\tilde{\delta}^3}{3!}+\frac{3\alpha-8}{4!}\tilde{\delta}^4+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\tau\delta^2}{\mu}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{V_0\delta}{\nu}+\frac{1}{8}\left(\frac{V_0^2\delta^2}{\nu^2}+\frac{\delta^2}{R^2}\right)+\ldots\right]+\frac{\rho g\delta^3}{\mu}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\left(3\frac{V_0\delta}{\nu}-8\frac{\delta}{R}\right)+\ldots\right].$$

Данное разложение показывает, что изменение гидродинамических характеристик вследствие оттока жидкой фазы происходит тогда, когда число Рейнольдса $V_0\,\delta/\nu$ соизмеримо с единицей.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969 .
2. Ерощенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. - М.: Наука, 1984 .

УДК 536.758

В.В. Белов, доцент;
В.Б. Немцов, профессор

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УНАРНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ В ПРИГРАНИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

The closed integral equation for the one-particle mean force potential in the external field is obtained in the first approximation of the functional expansion over the one-particle direct correlation function density using additional approximation of two-particle direct correlation function.

При рассмотрении равновесных пространственно неоднородных систем необходимо в явном виде учитывать источник такой неоднородности, каковым может являться, например, ограничивающая систему поверхность. Это осуществляется введением в гамильтониан системы потенциала внешнего поля u [1], которое независимо действует на каждую молекулу и является функцией ее обобщенных координат: $u=u(q)$.

Будем рассматривать совокупность из N тождественных несферических частиц в объеме V при температуре T, находящуюся под действием внешнего поля u. Считая межчастичное взаимодействие Φ парным, потенциальную энергию такой системы можно представить в виде

$$U_N = \Phi_N + \sum_{i=1}^{N} u(i), \Phi_N = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} \Phi(i,j). \tag{1}$$

Здесь для сокращения записи номера частиц и их координаты обозначены одним числовым символом. Все термодинамические характеристики рассматриваемой системы определяются ее конфигурационным интегралом

$$Q_N = \int_\Gamma d1 \cdots \int_\Gamma dN \exp\left\{-\beta\left[\Phi_N + \sum_{i=1}^{N} u(i)\right]\right\}, \tag{2}$$

где $\Gamma=V\Omega$, а Ω – объем в пространстве угловых переменных, задающих ориентацию молекул, $\beta=1/k_B T$, k_B – постоянная Больцмана.

Осуществить прямое интегрирование в (2) для систем взаимодействующих частиц не представляется возможным, поэтому необходим иной