УДК 532.5(075.8)

А.Н.Вислович, доцент;

В.Ю.Боровик, студент

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ РЕЗЕРВУАРА

The problem of the fluid outflow by action of the compresed gas have been solved on the base of generalized Bernyer equation.

Во многих случаях инженерной практики возникает задача определения скорости истечения жидкости из резервуаров под действием сжатого газа, частично заполняющего резервуар. Теоретическое исследование этой проблемы обычно проводится в квазистационарном приближении, когда характеристики истечения в каждый момент времени успевают принять стационарные значения, соответствующие мгновенному значению давления газа в данный момент времени. Максимальное значение скорости истечения достигается в начальный момент времени, когда перепад давления максимален, а затем монотонно уменьшается по мере уменьшения давления. Эта модель имеет достаточно широкую область применения [1]. Вместе с тем развитие техники приводит к ситуациям, в которых существенную роль играет инерционное запаздывание характеристик истечения (к примеру, в устройствах импульсной подачи жидкости, которые получают распространение в пожарной технике). Исследование импульсного истечения в рамках квазистационарного приближения невозможно, поскольку в этой модели исключена стадия разгона жидкости из состояния покоя. При импульсной подаче жидкости эта стадия представляет принципиальный интерес, поскольку оказывает существенное влияние на такие практически важные характеристики, как время истечения, средняя сила реакции струи и др. В настоящей работе проведено исследование аккумуляторного истечения жидкости с учетом существенно нестационарных эффектов.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Газ и жидкость находятся в цилиндрическом резервуаре площадью поперечного сечения $S_р$ и занимают в начальный момент времени объемы (длиной $l_г$ и $l_ж$), разделенные плоской границей. Далее предполагается, что в процессе вытеснения жидкости граница раздела остается плоской, а ее положение определяется координатой $z(t)$. Отметим, что ускоренно движущаяся плоская граница может быть подвержена неустойчивости Рэлея-Тэйлора и действию других факторов, разрушающих ее структуру, однако детальное обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

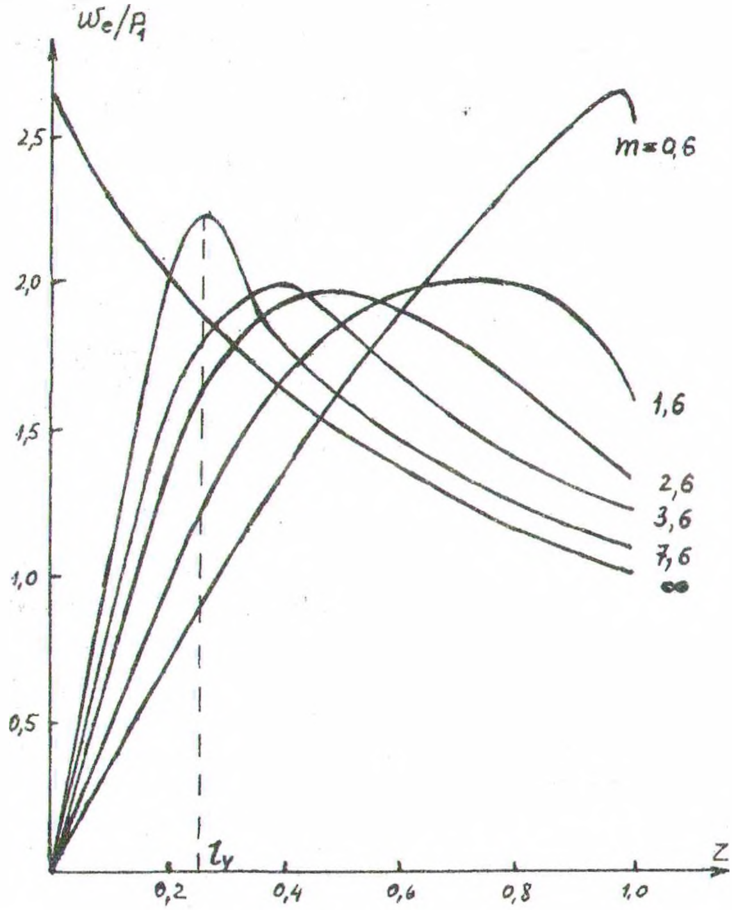

Рис.1.

При скоростях движения границы, значительно меньших скорости звука, давление газа в любой момент успевает выравниваться по всему объему, что позволяет считать процесс расширения газа квазистатическим. Приняв модель политропного расширения, получим зависимость давления газа внутри резервуара от положения границы: $p_i = p_0 l_г^n / \left(l_г + \hat{z}\right)^n$, где n - показатель политропы.

Предположим, что резервуар имеет цилиндрический насадок длиной $l_н$ и площадью поперечного сечения $S_н$. Истечение жидкости происходит во внешнюю газовую среду с постоянным давлением p_e = const.

Уравнение Бернулли для начальной и конечной точек элементарной трубки тока (которая начинается на границе раздела и заканчивается на выходе из насадки) вязкой несжимаемой жидкости при неустановившемся движении имеет вид [1]

$$p_i + \rho u_i^2 / 2 = p_e + \rho u_e/2 + p_c' + p_u'. \quad (1)$$

Здесь ρ-плотность жидкости, u_i , u_e -скорости жидкости на границе раздела в резервуаре и на выходе из насадка соответственно; $p_u' = \rho \int (du/dt) dl$ (dl-элемент длины трубки тока) - перепад давления, связанный с неустановившимся характером движения; p_c - потери давления на сопротивление. Перепад давления , связанный с силой тяжести в (1), не учитывается, поскольку в устройствах импульсной подачи он мал по сравнению с перепадом давления газа $\Delta p = p_i - p_e$, составляющим десятки атмосфер.

Предположим, что в процессе истечения форма линий тока не претерпевает существенных изменений. В этом случае поток можно рассматривать как совокупность неизменных по форме (но не по длине) элементарных струек, для каждой из которых справедливо уравнение (1). Применяя для (1) операцию усреднения по всем трубкам тока ,получим уравнение Бернулли , характеризующее поток вытесняемой жидкости в целом:

$$p_i + \alpha_p \rho v_i^2 / 2 = p_e + \alpha_н \rho v_e^2 / 2 + p_c + p_u. \qquad (2)$$

Здесь v_i, v_e - усредненные скорости; α_p, $\alpha_н$ - безразмерные коэффициенты (коэффициенты кинетической энергии), зависящие от распределения скорости в поперечном сечении потока. В частности, для стержневого потока (u = const) $\alpha = 1$. Инерционный перепад давления равен:

$$p_u = \rho \frac{dQ}{dt} \int_{\hat{z}}^{l_{ж}+l_н} \alpha_0 / S dl = \rho S_н \left[\frac{\alpha_{op}(l_{ж} - \hat{z})}{S_p} + \frac{\alpha_{он} l_н}{S_н} \right] \frac{dv_e}{dt}, \qquad (3)$$

где $Q = v_i S_p = v_e S_н$ - объемный расход жидкости; α_{0p}, $\alpha_{0н}$ -безразмерные коэффициенты(коэффициенты импульса), зависящие от распределения скоростей в резервуаре и в насадке соответственно. Для стержневого течения $\alpha_0 = 1$. Поскольку $dt = d\hat{z}/v_i = S_p d\hat{z}/(S_н v_e)$, (3) принимает вид

$$p_u = \alpha_{op} \frac{S_н^2}{S_p^2} \left(l_{ж} - \hat{z} + \frac{\alpha_{он} S_p l_н}{\alpha_{op} S_н} \right) \frac{d}{d\hat{z}} \left(\frac{\rho v_e^2}{2} \right).$$

Некоторые исследования показывают, что потери давления на сопротивление p_c могут зависеть от ускорения [1], что составляет специфику неустановившихся течений. Однако из-за отсутствия достаточно развитых исследований этой проблемы для неустановившихся течений обычно используют формулы того же вида, что и для стационарных. Поэтому для местных потерь давления при входе жидкости из резервуара в насадок используем соотношение $p_c = \xi'\left(1 - S_н/S_р\right)\rho v_e^2/2$, где ξ' -безразмерный коэффициент, с помощью которого можно учесть влияние различных факторов. В частности ,при $\xi' = 1$ для p_c следует известная формула Идельчика. С учётом сделанных предположений уравнение (2) и начальное условие принимают вид

$$b(1+c-z)\frac{dw_e}{dz} + \xi w_e = \frac{p_0}{(1+a_1 z)^n} - p_e, \quad w_e\big|_{z=0} = 0, \tag{4}$$

где $0 < z < 1$, $b = \alpha_{op} S_н^2 / S_p^2$, $a_1 = l_{ж} / l_г$, $z = \hat{z} / l_{ж}$, $w_e = \rho v_e^2 / 2$,

$$\xi = \alpha_н - \frac{\alpha_p}{\alpha_{op}} \cdot \frac{S_н^2}{S_p^2} + \left(1 - \frac{S_н}{S_p}\right)\xi', \quad c = \frac{\alpha_{0н} S_p l_н}{\alpha_{op} S_н l_{ж}}.$$

Умножив уравнение (4) на dz и проинтегрировав его в пределах от 0 до 1, получим

$$bcw_e\big|_{z=1} + (b+\xi)\int_0^1 w_e dz = \int_0^1 (p_i - p_e) dz.$$

Здесь первым слагаемым для короткого насадка ($c \to 0$) можно пренебречь, что позволяет получить выражение для среднего значения плотности кинетической энергии струи в виде

$$\overline{w_e} = \int_0^1 w_e dz = \frac{1}{b+\xi}\left\{\int_0^1 \frac{p_0 dz}{(1+a_1 z)^n} - \int_0^1 p_e dz\right\} = \tag{5}$$
$$= \frac{1}{b+\xi}\left\{\frac{p_0\left[1-(1+a_1)^{1-n}\right]}{a_1(n-1)} - p_e\right\} = \frac{1}{b+\xi} \cdot \frac{A}{S_p l_{ж}}$$

Отсюда следует, что коэффициент $(b + \xi)^{-1}$ равен отношению кинетической энергии жидкости к работе A, совершенной газом. В частности, для идеальной жидкости, когда $b + \xi = 1$, работа расширения газа полностью идет на сообщение кинетической энергии жидкости.

Средняя кинетическая энергия $\overline{w_e}$ сама по себе не является показателем эффективности устройства импульсной подачи жидкости. Как следует из (5), максимальное значение $\overline{w_e}$ достигается при $a_1 \to 0$ и равно $\overline{w}_{e\,max} = (p_0 - p_e)/(b + \xi)$. При заданном объеме жидкости в резервуаре условие $a_1 \to 0$ означает, что объем газа в начальный момент должен во много раз превышать объем жидкости. Таким образом, достижение максимума кинетической энергии всей жидкости при фиксированном ее объеме требует неограниченного увеличения габаритов резервуара. Поэтому в качестве критерия эффективности устройства следует выбрать отношение кинетической энергии ко всему объему резервуара:

$$\tilde{w} = \frac{\overline{w} S_p l_{ж}}{S_p \left(l_{ж} + l_{г}\right)} = \frac{\overline{w} a_1}{1 + a_1}.$$

Из условия максимума $d\tilde{w} / da_1 = 0$ получим оптимальное значение отношения объема жидкости к объему газа:

$$a_{1*} = \left(\frac{n}{1 + \beta p_e / p_0}\right)^{1/\beta} - 1, \qquad \beta = n - 1.$$

Отсюда, в частности для двухатомного газа при адиабатном расширении ($n = 1{,}4$), следует $a_{1*}=2{,}32/(1+0{,}4p_e/p_0)^{2,5}$, при $p_e/p_0 = 1/25$ имеем: $a_{1*} = 1{,}23$.

Путём введения новой независимой переменной $x = (1+c-z)a$, где $a = a_1/[1+a_1(1+c)]$, и новой зависимой переменной $w_i = bw_e$, уравнение (4) приводится к ещё более формализованному виду:

$$\begin{gathered} -x\, dw_i/dx + mw_i = p_1 \big/ (1-x)^n - p_e, \qquad w_i\big|_{x=x_0} = 0, \\ x < x_0 = x\big|_{z=0} = a(1+c), \qquad x > x_1 = x\big|_{z=1} = ac. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $m = \xi/b$, $p_1 = p_0/[1 + a_1(1 + c)]$.

Переменная x имеет ясный геометрический смысл в случае исчезающе малой длины насадка ($l_н \to 0$), когда $c \to 0$. В этом случае $a = l_ж/(l_г + l_ж)$, и $x = \left(l_{ж} - \hat{z}\right) / \left(l_{г} + l_{ж}\right)$ - текущее значение длины столба жидкости в резервуаре, отнесённое к длине резервуара. Смысл w_i и параметров в (6) предельно упрощается для идеальной жидкости, когда распределения скоростей на границе раздела и в струе можно считать однородными (стержневое течение). В этом случае $b = S_н^2 / S_р^2$, $\xi' = 0$, $\xi = 1 - b$, w_i – плотность кинетической энергии жидкости в резервуаре (вдали от выходного отверстия).

Путем непосредственной подстановки можно показать, что уравнению (6) и нулевому начальному условию удовлетворяет решение вида

$$w_i = x^m \left(\int_x^{x_0} \frac{p_1 dy}{y^{m+1}(1-y)^n} - \int_x^{x_0} \frac{p_e dy}{y^{m+1}} \right). \tag{7}$$

Второй интеграл в (7), связанный с действием постоянного по величине противодавления, допускает элементарное интегрирование. Первый интеграл, описывающий действие изменяющегося внутреннего давления, относится к классу биномиальных интегралов, которые допускают выражение через элементарные функции лишь в трех случаях - если оказывается целым одно из трех чисел m, n, m+n. Для построения рационального алгоритма расчетов при произвольных m, n, а также для удобства теоретического исследования введем трехпараметрические специальные функции:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{I}}_{p,q} \equiv I_{p,q} = x^{p-1}\int_x^{x_0} y^{-p}(1-y)^{-q}\,dy. \tag{8}$$

Тогда решение (7) можно представить в виде

$$w_i = p_l I_{m+1,n} - p_e I_{m+1,0}. \tag{9}$$

Путем непосредственного дифференцирования легко проверить следующие формулы понижения показателей степени I-функций:

$$I_{p+1,q+1} = \frac{1}{qX_0^q} Q_{p,q} + \frac{p+q}{q} I_{p+1,q}, \tag{10}$$

$$I_{p+1,q+1} = \frac{-1}{pX_0^q} Q_{p+q} + \frac{p+q}{p} xI_{p,q+1}, \tag{11}$$

где

$$Q_{p,q} = x^p X_0^q\left(\frac{1}{x_0^p X_0^q} - \frac{1}{x^p X^q}\right) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^p - \left(\frac{X_0}{X}\right)^q, \quad X = 1-x, \quad X_0 = 1-x_0. \tag{12}$$

При $c = 0$, $Q_{p,q} = (1-z)^p - (1+a_1 z)^q$.

Последовательно понижая показатели степени функции $I_{m+1,n}$, с помощью (10), (11) придем к неприводимым функциям, показатели которых представляют дробную часть чисел m и n и которые будем обозначать соответственно через $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$. Неприводимые функции I выражаются через известные в теории специальных функций бетта-функции: $I_{\alpha,\beta} = \left[B_{\alpha,\beta}(x_0) - B_{\alpha,\beta}(x)\right]/x^{\alpha}$, где $B_{\alpha,\beta}(z) = \int_0^z y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy$ - неполная бетта-функция.

Рассмотрим I-функции для частного случая, когда они выражаются через элементарные. Положим, что показатель политропы можно представить в виде $n = \beta+1$, где $1< \beta \le 0$ - неприводимое значение этого показателя. Такое предположение соответствует, к примеру ,адиабатному расширению одноатомного (n=5/3), двухатомного (n=7/5), трехатомного (n=4/3) газов и их смесей . Значение параметра m выберем специальным образом: m=-β+k, где k = 1, 2... натуральные числа.

Учитывая,что для идеальной жидкости m=1/b-1, $b = d_н^4 / d_р^4$, получим выражение, определяющее отношение диаметров насадка и резервуара через выбранные параметры решения $d_н/d_р = (-\beta-1+k)^{-1/4}$. Приведем некоторые значения этого отношения для двухатомного газа:

k	1	2	3	4	8
m	0.6	1.6	2.6	3.6	4.6
$d_н/d_р$	0.889	0.786	0.726	0.683	0.584

Для выбранных таким образом значений показателя m последовательность функций (10), (11) обрывается при k=0. При этом получим :

$$I_{-\beta+1,\beta+1} = Q_{-\beta,\beta} / (\beta X_0^{\beta}). \qquad (13)$$

Используя это выражение из (11), можно получить I-функции с показателем m = -β+k. В частности, для первой (k=1), имеющей физический смысл I-функции, получим выражение

$$I =_{1-\beta+1,\beta+1} = \frac{1}{(1-\beta)X_0^{\beta}}\left(-Q_{1-\beta,\beta} + \frac{x}{\beta}Q_{-\beta,\beta}\right). \qquad (14)$$

Для численных расчетов вместо переменной w_i удобно ввести безразмерную переменную

$$w = w_i/p_1 = I_{m+1,n} - (p_e/p_1)I_{m+1,0}, \qquad (15)$$

где $I_{m+1,0} = \left[1-(x/x_0)^m\right]/m$.

Приведем выражение для расчета других характеристик истечения через переменную w.

Скорости движения жидкости в резервуаре (вдали выходного отверстия) и в струе соответственно:

$$v_i = \left(\frac{2p_1}{\rho}\right)^{1/2} w^{1/2}, \qquad v_e = \left(\frac{2p_1}{\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{w}{b}\right)^{1/2}. \qquad (16)$$

Ускорение жидкости в резервуаре:

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i\frac{dv_i}{dz} = -\frac{p_1 a}{\rho l_{ж}}\cdot\frac{dw}{dx}. \qquad (17)$$

Полный импульс струи:

$$P = S_p \int_0^{l_{ж}} \rho v_e d\hat{z} = \left(\frac{2p_1}{\rho b}\right)^{1/2} \overline{w^{1/2}}\,. \tag{18}$$

Время истечения жидкости из резервуара:

$$\tau = \int_0^{l_{ж}} \left(d\hat{z}/v_i\right) = \left(\frac{\rho}{2p_1}\right)^{1/2} l_{ж} \overline{w^{-1/2}}\,. \tag{19}$$

Средняя сила реакции струи:

$$\frac{P}{\tau} = \frac{2p_1 S_н}{b} \cdot \overline{w^{1/2}} \Big/ \overline{w^{-1/2}}\,. \tag{20}$$

Здесь использовалось предположение, что $b = S_н^2 / S_р^2$, а черта означает усреднение в том же смысле, что и в соотношении (5).

Соотношения (14), (12), (10), (11) позволяют просто рассчитывать зависимость плотности кинетической энергии жидкости в резервуаре (а следовательно, и в струе) от положения границы раздела для достаточно широкого набора значений параметра m: m = 1 - n + k, k = 1, 2, 3... На рис.2 представлены зависимости обезразмеренной плотности кинетической энергии струи

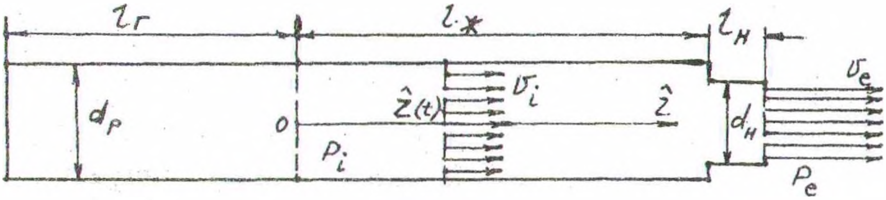

Рис. 2.

$w_e/p_1 = w/b$ для приведенных ранее значений параметра m и $a_1 = 1$ ($l_ж = l_г$). Возрастающий участок на этих зависимостях описывает стадию ускорения жидкости, которая отсутствует в квазистационарном приближении (кривая $m \to \infty$). При $m > 15$ расстояние $l_у$, которое граница проходит с ускорением, значительно меньше первоначальной длины столба жидкости $l_ж$. В этом случае стадия ускорения слабо влияет на интегральные характеристики истечения и этот режим можно охарактеризовать как квазистационарный. При $m < 1,5$ жидкость проходит большую половину пути с ускорением, и, следовательно, инерционное запаздывание в этом случае играет определяющую роль (импульсный режим). Значение $m \sim 2,5$, при котором $l_у \sim l_ж/2$, является характерным значением, разделяющим квазистационарнарный и импульсный режимы истечения жидкости. Аналогичные расчеты можно провести для других значений a_1.

На стадии ускорения частицы, вылетающие из резервуара позже, догоняют частицы, вылетевшие раньше. Поэтому на конечной стадии истечения в импульсном режиме скорости вылетевших частиц в результате столкновений должны усредняться и основная масса жидкости может образовать единый объем, движущийся с некоторой усредненной скоростью. В квазистационарном режиме, напротив, происходит дробление объема, поскольку основное время истечения занимает стадия замедленного движения границы, при котором частицы, вылетевшие позже, отстают от частиц, вылетевших раньше.

ЛИТЕРАТУРА

Емцев Б.Г. Техническая гидродинамика. - М.: Машиностроение, 1987.

УДК 532.517

А.М. Волк, ст. преподаватель

ПЛЁНОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Laminar film movement of a viscous liquid under influence of a gas flow on an inclined nontight plane and internal wall of the nontight cylinder is considered. The analytical solutions of the Navier-Stokes equations are received and basic dynamic characteristics are found.

Гидродинамика плёночного течения имеет существенное значение в процессах тепломассопереноса и при оптимизации технологических процессов.

В ряде случаев плёночное течение осуществляется на проницаемых поверхностях. Отсос используется для управления пограничным слоем и влияния на устойчивость ламинарного режима движения [1,2].

Рассмотрим плёночное ламинарное течение вязкой жидкости по наклонной плоскости под воздействием газового потока. При постоянной скорости оттока V_0 с учётом действия силы тяжести g_α и перепада давления по длине $\psi = \partial P / \partial x$ уравнение движения жидкой фазы будет

$$V_0 \frac{dU}{dy} = g_\alpha - \psi + \nu \frac{d^2U}{dy^2}.$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на поверхности и равенство касательных напряжений на границе раздела фаз: