63. Luenberger D.G., Arbel A. Singular dynamic Leontief system // Econometrica.- 1977.- Vol.45, № 4.- P.991-995.
64. Pandolfi L. Some mathematical methods in the theory of linear control systems (Italian).-Bologna:Pitagora Editrice XII,1986.
65. Pandolfi L. Generalized control systems, boundary control systems, and delayed control systems // Math. Control Systems.-1990, №3.- P.165-181.
66. Schraft R.D., Wanner M.I. The aircraft cleaning robot Skywash // Industrial Robot. - 1993, V.20. - P.21 - 24.
67. Spong M.W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circ. Systems Sing. Proc.- 1986.- Vol.5, № 1.- P.69-85.
68. Willems J.C. Paradigms and purzles in the theory of dynamical systems // IEEE Tr. Aut. Contr.- 1991, V.36.- №3.- P.259-294.
69. Xu H., Mizukami K. On linear - quadratic optimal regulator for continuous - time descriptor systems // Proc 31st IEEE Conf. Dec. and Control.- 1992. - V.2. - P. 987 - 988.
70. Zou Yan, Yang Chengwu Algorithms for computation of the transfer function matrix for two - dimensional regular and singular general state - space models // Automatica, 1995, V.31, №9,-P. 1311 - 1315.

УДК 517.977.1

А.А.Якименко, ассистент

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА РАЗНОСТНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

The algorithm for constructing of stabilizing regulators for a linear neutral type system is given.

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}(t) = A_0\, x(t) + A_1\, x(t-h) + A_2\, \dot{x}(t-h) + b\, u(t), \quad t > 0, \qquad (1)$$

где $x(\cdot), b \neq 0 \in \mathbf{R}^2; A_i \in \mathbf{R}^{2\times 2}, i = 0,1,2; u(\cdot), h \in \mathbf{R}, h > 0.$ Не ограничивая общности, можно считать $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Стабилизирующий регулятор будем искать в классе линейных регуляторов:

$$u(x) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=0}^{M} q'_{ij} x^{(j)}(t - jh), \qquad (2)$$

где $q_{ij} \in \mathbf{R}^2, i = 0,1,\ldots,L, j = 1,2,\ldots,M$; $x^{(j)}$- j-я производная вектора $x(t)(x^{(0)}(t) \equiv x(t))$, знак (′) означает транспонирование.

Для построения регулятора вида (2) нужно найти квазиполиномы типа

$$q^k(\lambda, e^{-\lambda h}) = q_{00}^k \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=0}^{M} q_{ij}^k \lambda^j e^{-i\lambda h} \quad , \lambda \in \mathbf{C}, \tag{3}$$

где $L, M \in \mathbf{R}$ – подлежат определению, $k = 1,2$, которые естественным образом связаны с операторным представлением компонент искомого регулятора:

$$q^k(p, e^{-ph}) = q_{00}^k \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=0}^{M} q_{ij}^k p^j e^{-iph} \quad , p = \frac{d}{dt}.$$

Пусть $A(\lambda, e^{-\lambda h}) \overset{def}{=} A_0 + e^{-\lambda h} A_1 + \lambda e^{-\lambda h} A_2$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Возможны 4 случая:

1) $det[A(\lambda, e^{-\lambda h})b, b] \equiv 0;$

2) $det[A(\lambda, e^{-\lambda h})b, b] \equiv const \neq 0;$

3) $det[A(\lambda, e^{-\lambda h})b, b] = \gamma_0 + e^{-\lambda h};$

4) $det[A(\lambda, e^{-\lambda h})b, b] = \gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}.$

Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1). В этом случае матрицу $A(\lambda, e^{-\lambda h})$ можно представить в виде

$$A(\lambda, e^{-\lambda h}) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda \beta_2 e^{-\lambda h} & 0 \\ a_1(\lambda, e^{-\lambda h}) & a_2(\lambda, e^{-\lambda h}) \end{bmatrix},$$

где $a_1(\lambda, e^{-\lambda h}), a_2(\lambda, e^{-\lambda h})$ – квазиполиномы вида (3) ($L = 1$). В силу необходимого условия асимптотической устойчивости *замкнутой* системы (1), (2) (а в данном случае и достаточного ([1]))

$$rank[A(\lambda, e^{-\lambda h}) - \lambda E, b] = 2, \lambda \in \mathbf{C}, Re\,\lambda \geq 0$$

и вида регулятора (2) ((3)), необходимым и достаточным условием стабилизируемости (1) будет отрицательность действительных частей всех корней квазиполинома:

$$\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \lambda \beta_2 e^{-\lambda h} - \lambda. \tag{4}$$

В предыдущих работах ([2]) были получены в пространстве коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, h$ области устойчивости (асимптотической устойчивости) квазиполинома (4), которые и обуславливают стабилизируемость системы (1) регулятором вида (2).

2). Путём применения преобразования подобия (определитель преобразующей матрицы тождественно равен ненулевой постоянной) в этом случае матрицу $A(\lambda, e^{-\lambda h})$ можно представить в виде

$$A(\lambda, e^{-\lambda h}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(\lambda, e^{-\lambda h}) & a_2(\lambda, e^{-\lambda h}) \end{bmatrix},$$

где $a_1(\lambda, e^{-\lambda h}), a_2(\lambda, e^{-\lambda h})$ – квазиполиномы вида (3) ($L = 2$). Так как, замыкая систему (1) регулятором вида (2), можно получить любое наперёд заданное характеристическое уравнение:

$$det[A(\lambda, e^{-\lambda h}) - \lambda E] = 0,$$

то в случае 2) система (1) всегда стабилизируема регулятором вида (2) (причём независимо от запаздывания h).

3). Преобразованием подобия с постоянной невырожденной матрицей матрицу $A\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)$ можно привести к виду

$$A(\lambda, e^{-\lambda h}) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 \lambda e^{-\lambda h} & \gamma_0 + e^{-\lambda h} \\ a_1(\lambda, e^{-\lambda h}) & a_2(\lambda, e^{-\lambda h}) \end{bmatrix},$$

где $a_1(\lambda, e^{-\lambda h}), a_2(\lambda, e^{-\lambda h})$ – квазиполиномы вида (3) ($L = 1$). Будем предполагать, что $\beta_1 \neq 0$ (иначе исходную систему, замыкая регулятором вида (2), можно свести к запаздывающей). Введя новый регулятор

$$u(t) = [-a_1(\lambda, e^{-\lambda h}), \quad -a_2(\lambda, e^{-\lambda h})]x(t) + v(t),$$

систему (1) в случае 3) можно переписать в операторном виде

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 \lambda e^{-\lambda h} & \gamma_0 + e^{-\lambda h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \tag{5}$$

Пусть выполнено условие:

$$\beta_1 \gamma_0 + 1 \neq 0. \tag{6}$$

Выполним в системе (5) следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t), \\ x_2(t) = -\beta_1 \dot{y}_1(t) + y_2(t). \end{cases} \tag{7}$$

Обратная замена с учётом первого уравнения в (5) выглядит:

$$
\begin{cases}
y_1(t) = x_1(t), \\
y_2(t) = \beta_0 \beta_1 x_1(t) + \beta_1^2 \dot{x}_1(t-h) + (1+\beta_1 \gamma_0) x_2(t) + \beta_1 x_2(t-h).
\end{cases} \tag{8}
$$

Для новых переменных система (5) перепишется в виде

$$
\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_0}{1+\beta_1\gamma_0} & \dfrac{\gamma_0 + e^{-\lambda h}}{1+\beta_1\gamma_0} \\ \dfrac{\beta_0^2\beta_1}{1+\beta_1\gamma_0} & \dfrac{\beta_0\beta_1\gamma_0}{1+\beta_1\gamma_0} + \dfrac{\beta_0\beta_1}{1+\beta_1\gamma_0} e^{-\lambda h} + \beta_1 \lambda e^{-\lambda h} \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\beta_1\gamma_0 \end{bmatrix} v(t).
$$

Введя новый регулятор,

$$
v(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_0^2\beta_1}{(1+\beta_1\gamma_0)^2}, & -\dfrac{\beta_0\beta_1\gamma_0}{(1+\beta_1\gamma_0)^2} - \dfrac{\beta_0\beta_1}{(1+\beta_1\gamma_0)^2} e^{-\lambda h} - \dfrac{\beta_1}{1+\beta_1\gamma_0} \lambda e^{-\lambda h} \end{bmatrix} y(t)
$$

$$
+ \frac{1}{1+\beta_1\gamma_0} v_1(t),
$$

придём к системе

$$
\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_0}{1+\beta_1\gamma_0} & \dfrac{\gamma_0 + e^{-\lambda h}}{1+\beta_1\gamma_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1(t),
$$

которая является запаздывающей, и вопрос её стабилизации регулятором вида (2) был изучен в [3].

Пусть теперь $\beta_1 \gamma_0 + 1 = 0$. Тогда систему (5) можно представить в виде

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 \lambda e^{-\lambda h} & -\dfrac{1}{\beta_1} + e^{-\lambda h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \tag{9}
$$

Выполнив в (9) замену переменных $x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} y(t)$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, можно прийти к системе вида

$$\dot{y}(t)=\begin{bmatrix} \beta_0-\dfrac{\alpha}{\beta_1}-\alpha e^{-\lambda h}+\beta_1\lambda e^{-\lambda h} & -\dfrac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h} \\ -\alpha\left(\beta_0+\beta_1\lambda e^{-\lambda h}\right)-\alpha^2\left(-\dfrac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h}\right) & -\alpha\left(-\dfrac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h}\right) \end{bmatrix} y(t)$$

$$+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v(t). \tag{10}$$

Известно [2], что квазиполином $\beta_0-\dfrac{\alpha}{\beta_1}-\alpha e^{-\lambda h}+\beta_1\lambda e^{-\lambda h}-\lambda$ устойчив, причём независимо от величины запаздывания $h>0$, если точка $(\dfrac{\alpha}{\beta_1}-\beta_0,\ \alpha,\ -\beta_1)$ принадлежит области $\Omega=\left\{|\beta_1|<1;\ \dfrac{\alpha}{\beta_1}-\beta_0>|\alpha|\right\}$. Тогда в случае $|\beta_1|<1$ для параметра $\alpha\in\mathbf{R}$ можно получить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \alpha>\beta_0\beta_1 \\ \alpha>\dfrac{\beta_0\beta_1}{1-\beta_1}, \ 0<\beta_1<1; \\ \alpha>\dfrac{\beta_0\beta_1}{1+\beta_1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha<\beta_0\beta_1 \\ \alpha<\dfrac{\beta_0\beta_1}{1-\beta_1}, -1<\beta_1<0 \\ \alpha<\dfrac{\beta_0\beta_1}{1+\beta_1} \end{cases}$$

Из данных систем всегда можно найти $\alpha_0\in\mathbf{R}$ такое, что квазиполином $\beta_0-\dfrac{\alpha_0}{\beta_1}-\alpha_0 e^{-\lambda h}+\beta_1\lambda e^{-\lambda h}-\lambda$ устойчив, причём независимо от величины запаздывания $h>0$, и, следовательно, регулятор

$$v(t)=[\alpha_0(\beta_0+\beta_1\lambda e^{-\lambda h})+\alpha_0{}^2(-\frac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h}) \quad \alpha_0(-\frac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h})-1]y(t)$$

стабилизирует систему (10).

Далее будем предполагать, что $|\beta_1|\geq 1$. Если в системе (9) $\beta_0=0$, то необходимое условие её стабилизируемости регулятором вида (2) можно записать в виде

$$rank\left[\begin{bmatrix} \beta_1\lambda(-\dfrac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h}) & -\dfrac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h} \\ \eta_1(\lambda,e^{-\lambda h}) & \eta_2(\lambda,e^{-\lambda h})-\lambda \end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]=2, \lambda\in\mathbf{C}, Re\,\lambda\geq 0,$$

где $\eta_1(\lambda, e^{-\lambda h}), \eta_2(\lambda, e^{-\lambda h})$- некоторые квазиполиномы вида (3). Но

$$det\begin{bmatrix} \beta_1\lambda(-\frac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h}) & -\frac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h} \\ \eta_1(\lambda, e^{-\lambda h}) & \eta_2(\lambda, e^{-\lambda h})-\lambda \end{bmatrix} = , \qquad (11)$$

$$(-\frac{1}{\beta_1}+e^{-\lambda h})(\beta_1\lambda(\eta_2(\lambda, e^{-\lambda h})-\lambda)-\eta_1(\lambda, e^{-\lambda h}))$$

что с учётом того, что $|\beta_1| \geq 1$, и того, что второй множитель - целая функция, даёт нам бесконечное число корней (11) с неотрицательными действительными частями, т.е. необходимое условие стабилизируемости нарушается и система (9) в этом случае не стабилизируема регулятором вида (2) . Предположим, что в (9) $\beta_0 \neq 0$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t), \\ x_2(t) = -\beta_1\,\dot{y}_1(t) + y_2(t). \end{cases} \qquad (12)$$

Обратная замена с учётом первого уравнения в (9) выглядит:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = \beta_0\,\beta_1\,x_1(t) + \beta_1^{\,2}\,\dot{x}_1(t-h) + \beta_1 x_2(t-h). \end{cases} \qquad (13)$$

Для новых переменных первое уравнение в (9) становится недифференциальным:

$$y_1(t) = \frac{1}{\beta_0\,\beta_1}y_2(t) - \frac{1}{\beta_0}y_2(t-h). \qquad (14)$$

Второе уравнение с учётом (14) запишется в виде

$$\ddot{y}_2(t) - \beta_0\,\dot{y}_2(t) - \beta_1\,\ddot{y}_2(t-h) + \beta_0\,v(t) = 0. \qquad (15)$$

Очевидно, что регулятор

$$v(t) = \frac{1+\beta_0}{\beta_0}\dot{y}_2(t) + \frac{1}{\beta_0}y_2(t) + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ddot{y}_2(t-h)$$

стабилизирует уравнение (15), а вместе с ним и (14). Учитывая (13), стабилизирующий систему (9) регулятор можно записать в виде

$$v(t)=\beta_1\left(\beta_0^2+\beta_0+1\right)x_1(t)+\beta_1^2\,\frac{\beta_0^2+\beta_0+1}{\beta_0}\,\dot{x}(t-h)+\beta_1^2\,\frac{2\beta_0+1}{\beta_0}\,\ddot{x}_1(t-h)+$$

$$+\frac{\beta_1^3}{\beta_0}\ddot{x}_1(t-2h)-\left(1+\beta_0\right)x_2(t)+\beta_1\,\frac{\beta_0^2+\beta_0+1}{\beta_0}\,x_2(t-h)+$$

$$+\beta_1\,\frac{\beta_0+1}{\beta_0}\,\dot{x}_2(t-h)+\frac{\beta_1^2}{\beta_0}\ddot{x}_2(t-2h).$$

Случай 4) является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hahn W. Über Differential-Differenzengleichungen mit anomalen Lösungen // Math. Annalen.-1957, Bd. 133.- P. 251-255.
2. Марченко В.М., Якименко А.А. К вопросу о распределении корней квазиполиномов // Докл. АН Беларуси.-1996.-Т. 40, №3.-С. 36-41.
3. Марченко В.М., Борковская И.М. О стабилизации линейных двумерных систем с запаздывающим аргументом. // Труды БГТУ, вып. II, физ.-мат.науки, Минск, 1995.-С.23-33.

УДК 531.19

Г.С.Бокун, доцент
В.С.Вихренко, профессор

МЕТОД СРЕДНИХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ОПИСАНИИ РАВНОВЕСНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМ

For investigation of thermodynamic and distribution functions of lattice gases the concept of mean potentials is developed. The self-consistently determined mean potentials between clusters placed on various sets of lattice sites are introduced. It is shown that the estimation of the critical temperature approaches to the exact value as the cluster size is growing.

1. Введение

Многочисленные важные физико-химические процессы связаны с переносом вещества и заряда на поверхностях и в объеме твердых тел. К ним относятся такие поверхностные явления, как адсорбция, десорбция, каталитические реакции, плавление, рост пленок и кристаллов, а также происходящие в объеме твердых тел твердотельные реакции, диффузия атомов и ионов в металлах, молекулярных, ионных и полупроводниковых кристаллах и стеклах, ионная электропроводность твердых электролитов и ионных кристаллов и т.п. Необходимость понимания явлений переноса