УДК 531

С.А. Борисевич, ассистент

РАЗРАБОТКА МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ МОДЕЛИ ГИБКОГО СТВОЛА ДЕРЕВА

Nonlinear multi-stage dynamical model of tree stem is developed and for this model the numerical investigation is realized.

В настоящей статье выясняется вопрос о влиянии поперечных изгибных колебаний ствола на его динамические параметры при падении. В некоторых работах (см., например, [6]) были рассмотрены эти колебания при взаимодействии дерева с машиной. Для этого использовалась приближенная формула

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)+q\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где η – поперечный прогиб; q – интенсивность поперечных сил; EJ – жесткость ствола.

Однако это уравнение нельзя использовать в случае больших прогибов. Кроме того, в случае переменной жесткости EJ решить аналитически это уравнение затруднительно. В данной статье предложен следующий метод.

Ствол дерева моделируется в виде нескольких жестких стержней, связанных между собой пружинами с крутильной жесткостью c_φ [1, 5]. В отличие от работ, посвященных статике, в нашей работе рассматриваются динамические явления в стержнях [6]. Жесткость недопила пренебрежимо мала по сравнению с жесткостью ствола. В этой модели стержни могут поворачиваться друг относительно друга, а угол взаимного поворота зависит от жесткости c_φ. Сопротивление воздуха не учитывается, и считается, что взаимное движение происходит в одной плоскости (рис. 1).

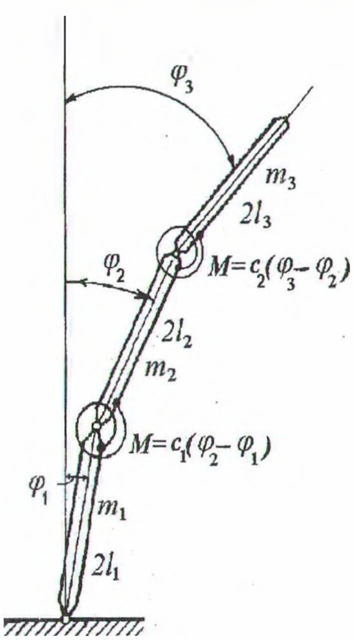

Рис. 1. Многоступенчатая модель ствола дерева

Составим уравнения движения в виде уравнений Лагранжа для модели гибкого дерева. Система характеризуется обобщенными координатами φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – углами поворота стержней, отсчитываемых от вертикали; m_k и $2l_k$ – масса и длина k-того звена.

Кинетическую энергию каждого стержня представляем как энергию поступательного движения центра масс и вращательного движения вокруг него. Полная кинетическая энергия записывается в виде

$$T=\sum\left(\frac{m_n v_{cn}^2}{2}+\frac{J_n\dot{\varphi}_n^2}{2}\right). \qquad (2)$$

Скорость центра масс стержня находится следующим образом:

$$v_{cn}^2=\dot{x}_{cn}^2+\dot{y}_{cn}^2, \qquad (3)$$

где $$x_{cn}=2l_1\sin\varphi_1+2l_2\sin\varphi_2+\ldots+l_n\sin\varphi_n, \qquad (4)$$

$$y_{cn}=2l_1\cos\varphi_1+2l_2\cos\varphi_2+\ldots l_n\cos\varphi_n. \qquad (5)$$

Потенциальная энергия равняется сумме потенциальной энергии стержней в поле сил тяжести и потенциальной энергии деформированных пружин:

$$U = -g(m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n) + \frac{c_1\varphi_1^2}{2} + \frac{c_2(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \ldots + \frac{c_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2}{2}. \quad (6)$$

Запишем систему из n нелинейных уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_k)(2m_k l_1 l_k + 4m_{k+1} l_1 l_k + \ldots + 4m_n l_1 l_k) + \\ &+ \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_k)(2m_k l_2 l_k + 4m_{k+1} l_2 l_k + \ldots + 4m_n l_2 l_k) + \ldots + \ddot{\varphi}_n \cos(\varphi_k - \varphi_n)(2m_n l_k l_n) = \\ &= g l_k (m_k + 2m_{k+1} + \ldots + 2m_n)\sin\varphi_k + c_{k-1}(\varphi_{k-1} - \varphi_k) - c_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где индекс k показывает номер текущего уравнения (k=1, 2, …, n).

В общем случае длины, массы стержней и жесткости шарниров разные. Разбив ствол дерева на стержни произвольным образом, находим жесткости шарниров следующим образом. В работе [4] найдена экспериментально-аналитическим способом жесткость хлыста EJ при статическом прогибе ствола. Если представить хлыст в виде стержней, то после изгиба стержня упругая ось его будет представлять собой ломаную линию с вершинами в точках соединения стержней [7]. Углы перелома ее будут

$$\Delta\alpha = \frac{ML}{EJ}, \quad (8)$$

где M – изгибающий момент; l – длина стержня. Выражая из этой формулы изгибающий момент, получаем

$$M_n = \frac{(EJ)_n}{l_n}\Delta\alpha_n. \quad (9)$$

Коэффициент, стоящий при $\Delta\alpha_n$, и есть жесткость шарнира для соответствующего стержня. Решим численно полученную систему уравнений. В данном случае в качестве примера ствол дерева разбит на четыре части:

m, кг	400	300	200	100
l, м	4	5	6	7
c, кНм	200	126.5	18	0

Начальные условия приняты следующие: скорости всех стержней равны нулю, и все стержни отклонены от вертикали на один градус. Результаты вычислений представим в виде графика (рис. 2).

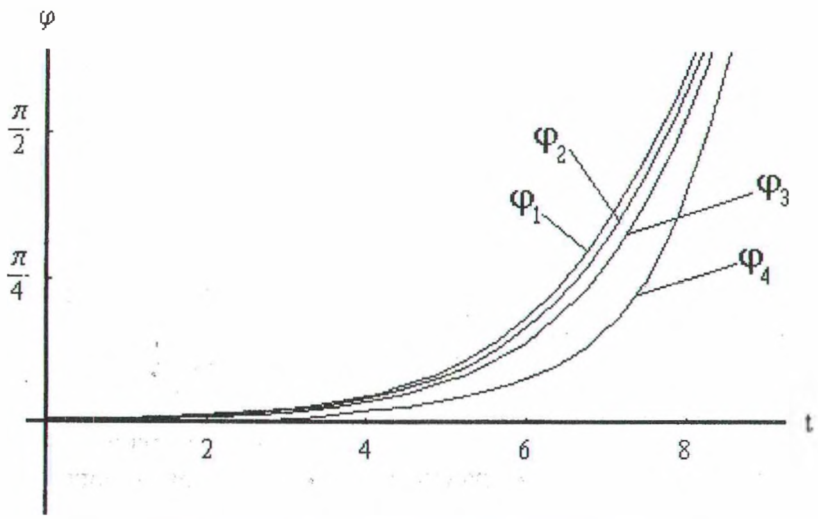

Рис. 2. Зависимость углов поворота стержней от времени

Из этого графика определяем форму ствола при падении и время падения дерева. В данном случае для первого стержня время падения t≈8.1 с, для последнего t≈8.6 с. Если устремить жесткость шарниров к бесконечности [2] и получить время падения для того же стержня, оно окажется равным t≈7.9 с. Решив полученную систему относительно угловых скоростей, находим угловые скорости каждого из стержней в момент соприкосновения с поверхностью (рис. 3).

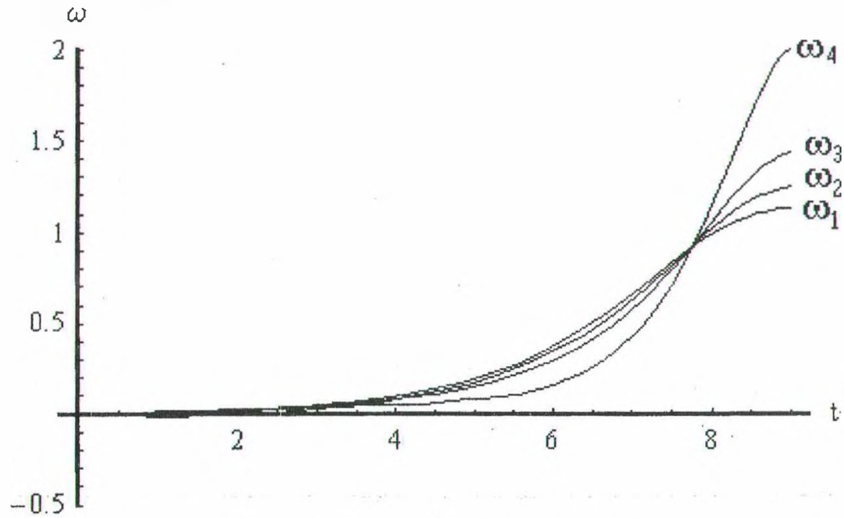

Рис. 3. Зависимость угловых скоростей от времени

Из графика видно, что угловая скорость падения верхушки ствола значительно выше, чем скорость основания.

Определяя скорости стержней в момент падения, можно найти ударный импульс, производимый стволом во время падения. Из графиков видно, что не все стержни падают одновременно и ударный импульс распределяется во времени, что приводит к уменьшению ударных сил. С этим явлением, очевидно, и связан тот факт, что экспериментально измеренное значение ударного импульса [6] оказалось меньше рассчитанного для модели жесткого стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. Коротаев Л.В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства. – Ленинград: АЛТИ, 1982. – 80 с.
4. Коротаев Л.В. Исследование жесткости хлыстов // Лесной журнал. – 1978. – Т. 1. – С. 48 – 54.
5. Борисевич С.А., Немцов В.Б. Нелинейная динамика падающего дерева // НИРС-2003. – 2003. – Т. 2. – С. 170.
6. Дебердеев А.А. О влиянии поперечных изгибных колебаний ствола на соударение дерева // Лесной журнал. – 1969. – Т. 1. – С. 72 – 82.
7. Крылов В.К. Расчет гибких стержней по методу последовательных приближений // Исследование по теории сооружений. – 1959. – Т. 8. – С. 447 – 459.